



Etude et qualification d'un modèle numérique complètement non-linéaire et dispersif pour les vagues en zone côtière

Cécile RAOULT^{1,2}, Michel BENOIT^{1,2}, Marissa L. YATES^{1,3}

1. Laboratoire d'Hydraulique Saint-Venant, Université Paris-Est,
(unité de recherche commune EDF R&D, Cerema, Ecole des Ponts ParisTech),
6 quai Watier, BP 49, F-78401 Chatou cedex, France.
2. EDF R&D, Laboratoire National d'Hydraulique et Environnement (LNHE)
6 quai Watier, BP 49, F-78401 Chatou cedex, France.
3. Cerema, Division Technique Eau, Mer et Fleuves
134 rue de Beauvais, F-60280 Margny-les-Compiègne, France.
cecile.raoult@edf.fr ; michel.benoit@edf.fr ; marissa.yates-michelin@cerema.fr

Résumé :

Afin de simuler la dynamique des vagues en domaine côtier en prenant en compte à la fois effets dispersifs et non-linéaires, un modèle numérique fondé sur une approche potentielle complètement non-linéaire est étudié. Ce modèle, composé de deux équations d'évolution de quantités surfaciques (élévation de surface libre et potentiel de surface libre) suivant ZAKHAROV (1968), a la particularité d'utiliser une formulation spectrale pour la résolution verticale du potentiel de vitesse dans le domaine fluide, en utilisant une base de polynômes de Tchebychev (TIAN & SATO, 2008).

La formulation mathématique du modèle est rappelée, et sa mise en œuvre numérique, sur des cas (x, z) pour l'instant, est présentée. La qualification de ce modèle est réalisée à travers l'application à plusieurs cas-tests dont deux sont présentés et analysés dans cette communication : propagation d'une onde solitaire fortement non-linéaire sur une grande distance, et simulation d'une des expériences de DINGEMANS (1994) pour des vagues régulières sur une barre trapézoïdale. Des études de convergence en temps, en espace et avec l'ordre des polynômes de Tchebychev sont menées, cette dernière montrant notamment qu'une très bonne précision peut être obtenue avec un ordre peu élevé de la méthode spectrale en z . Typiquement, un ordre de 6 à 8 sur les polynômes de Tchebychev paraît suffisant pour les applications pratiques. Les résultats présentés permettent de vérifier la précision et les capacités non-linéaires et dispersives du modèle proposé.

Mots-clés : Vagues non-linéaires, Houle, Hydraulique maritime, Hydrodynamique côtière, Simulation des vagues, Modèles de vagues, Modélisation numérique.

1. Introduction

Au cours de leur propagation depuis le large jusqu'à la plage, les vagues évoluent significativement sous l'effet combiné de différents processus, parmi lesquels réfraction, levée (*shoaling*), dissipation d'énergie due à la friction sur le fond ou au déferlement, diffraction, réflexion. Une variété d'approches de modélisation a été proposée pour représenter cette dynamique et les processus associés. Celles-ci peuvent être appréciées suivant deux caractéristiques principales : le caractère dispersif des équations considérées d'une part (quantifié à l'aide du paramètre de profondeur relative $\mu=kh$ où k est le nombre d'onde et h la profondeur d'eau), et le caractère non-linéaire d'autre part (quantifié à l'aide de la cambrure $\varepsilon=kH/2$, où H est la hauteur caractéristique des vagues). Une modélisation précise des vagues en zone côtière doit donc représenter au mieux les effets non-linéaires et dispersifs, tout en prenant en compte le caractère irrégulier et multidirectionnel de l'état de mer, ainsi que les variations de bathymétrie (en espace, et éventuellement en temps).

Différents modèles, de type Boussinesq, Serre ou Green-Naghdi, ont été développés depuis plus de 20 ans, amenant des progrès significatifs dans la prise en compte des effets non-linéaires et/ou dispersifs (*e.g.* NWOGU, 1993 ; MADSEN *et al.*, 1991 ; MADSEN & SCHÄFFER, 1998 ; GOBBI *et al.*, 2000 ; KIRBY, 2003 ; CHAZEL *et al.*, 2011). Reposant sur des développements asymptotiques en fonction des paramètres μ et/ou ε , supposés "petits", ces modèles ne sont *in fine* que partiellement dispersifs et/ou partiellement non-linéaires, même dans le cas de développements d'ordres élevés (MADSEN *et al.*, 2002 & 2006 ; BENOIT & CHAZEL, 2013).

Nous explorons ici une approche différente, fondée sur les équations surfaciques dites de Zakharov (ZAKHAROV, 1968), qui sont complètement non-linéaires et complètement dispersives dans leur formulation mathématique, décrites dans la partie 2 de cet article. Un modèle numérique est développé et présenté en partie 3 pour une seule dimension d'espace horizontale (x,z), poursuivant les travaux récemment engagés par YATES et BENOIT (2012) et BENOIT *et al.* (2013). Deux cas de validation sont ensuite présentés en analysés dans la partie 4.

2. Présentation du modèle mathématique

Nous supposons que le fluide est homogène, à masse volumique constante et non-visqueux, et que l'écoulement est irrotationnel, ce qui permet d'adopter une approche potentielle. Le potentiel de vitesse $\phi(\underline{x},z,t)$, où $\underline{x}=(x,y)$ dans le cas général, satisfait l'équation de Laplace dans tout le domaine fluide, complétée par les conditions aux limites en surface libre $z=\eta(\underline{x},t)$ (conditions cinématique et dynamique), au fond $z=-h(\underline{x},t)$ (condition d'imperméabilité) et sur les parois latérales (conditions de type Dirichlet ou Neumann). En supposant de plus que les vagues ne déferlent pas (continuité du domaine fluide entre le fond et la surface libre), on peut transformer les conditions de surface libre en deux équations régissant l'évolution en temps de deux

quantités surfaciques (ZAKHAROV, 1968), qui sont l'élévation de surface libre $\eta(\underline{x}, t)$ et le potentiel de surface libre $\tilde{\phi}(\underline{x}, t) \equiv \phi(\underline{x}, z = \eta(\underline{x}, t), t)$:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\nabla \eta \cdot \nabla \tilde{\phi} + \tilde{w} \left(1 + (\nabla \eta)^2 \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} (\nabla \tilde{\phi})^2 + \frac{1}{2} \tilde{w}^2 \left(1 + (\nabla \eta)^2 \right) \quad (2)$$

où $\tilde{w}(\underline{x}, t) \equiv \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=\eta(\underline{x}, t)}$ est la composante verticale de la vitesse en surface libre.

ZAKHAROV (1968) a montré que ce système est hamiltonien, l'Hamiltonien étant l'énergie mécanique totale du domaine fluide. Pour intégrer ces équations en temps, il est nécessaire d'estimer la vitesse verticale en surface $\tilde{w}(\underline{x}, t)$ à partir des deux quantités surfaciques dont on simule l'évolution $\eta(\underline{x}, t)$ et $\tilde{\phi}(\underline{x}, t)$, problème habituellement appelé "Dirichlet-to-Neumann" (DtN en abrégé).

3. Modélisation numérique

Nous étudions le modèle (1-2) en une seule dimension d'espace horizontale dans un premier temps, *i.e.* $\underline{x}=x$, dans le but de nous concentrer sur la résolution du problème DtN. Pour simuler numériquement le système (1-2), trois éléments sont nécessaires : (a) un algorithme de calcul de dérivées première et seconde en espace, (b) un schéma d'intégration en temps, et (c) une méthode de résolution du problème DtN. C'est ce troisième point qui pose le plus de difficulté, et nécessite une attention particulière.

Les choix adoptés pour les points (a), (b) et (c) sont les suivants :

- a) le calcul des dérivées spatiales est effectué à l'aide de schémas aux différences finies d'ordres élevés (à l'ordre 4, sauf indication contraire). Le domaine en x sera discrétisé avec N_x nœuds, avec un pas d'espace Δx , uniforme ou variable selon les cas ;
- b) l'avance en temps s'effectue à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta explicite d'ordre 4 (à 4 sous-pas), avec un pas de temps Δt constant ;
- c) la résolution numérique du DtN est obtenue en résolvant un problème aux limites de Laplace sur le potentiel ϕ sur tout le domaine fluide, en combinant une méthode spectrale en z , utilisée par TIAN & SATO (2008) et une discrétisation de type différences finies en x . Une transformation du domaine fluide est réalisée pour se ramener à un intervalle de $[-1, 1]$ pour la coordonnée verticale transformée (notée s). On suppose ensuite que la variation en s du potentiel peut être approchée par une somme de termes sur une base de fonctions en s :

$$\phi(\underline{x}, z) = \hat{\phi}(\underline{x}, s(\underline{x}, z)) \cong \sum_{n=0}^{N_T} a_n(\underline{x}) T_n(s) \quad (3)$$

Les fonctions $T_n(s)$ choisies ici sont les polynômes de Tchebychev (TIAN & SATO, 2008), où N_T indique le degré maximal des polynômes choisis. En introduisant cette approximation dans le système d'équations, et en utilisant une méthode de Galerkin

Thème 1 – Hydrodynamique côtière

pour éliminer la coordonnée s , on aboutit à un système d'équations linéaires sur les coefficients $a_n(\underline{x})$, dont la résolution permet de déterminer la valeur du potentiel sur tout le domaine fluide par (3). La vitesse verticale en surface est ensuite obtenue par :

$$\tilde{w}(\underline{x}) = \left. \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial s} \right|_{s=1} = \frac{2}{h(\underline{x}) + \eta(\underline{x})} \sum_{n=0}^{N_T} a_n(\underline{x}) n^2 \quad (4)$$

Pour chaque résolution du problème DtN (*i.e.* à chaque sous-pas de Runge-Kutta), il faut résoudre un système linéaire dont la taille dépend du degré maximal des polynômes de Tchebychev (N_T). Ce système possède au total $N_x(N_T+1)$ équations et sa matrice est très creuse. Pour sa résolution, nous utilisons le solveur direct (exact) MUMPS (*MUltifrontal Massively Parallel Solver*) (AMESTOY *et al.*, 2001).

4. Applications et validations du modèle numérique sur des cas (x,z)

Plusieurs cas de validation ont été réalisés sur cette version (x,z) du modèle, dont deux sont présentés ci-après : (1) la propagation d'une onde solitaire sur une grande distance, et (2) la simulation des expériences en canal à vagues de DINGEMANS (1994).

4.1 Propagation d'une onde solitaire sur fond plat

On considère une onde solitaire se propageant sans déformation sur un fond plat (profondeur d'eau prise égale à $h=1$ m ici). L'onde solitaire est caractérisée par sa hauteur adimensionnelle $\delta=H/h$. L'onde solitaire de référence (surface libre et potentiel de surface, célérité de propagation C), solution des équations d'Euler avec conditions aux limites de surface non-linéaires, est obtenue à l'aide de la méthode de calcul proposée par CLAMOND & DUTYKH (2013), fournissant une solution extrêmement précise. On définit également le nombre de Froude $F=C/C_0$ où $C_0=\sqrt{gh}$.

Dans les cas présentés ici, on considère un cas fortement non-linéaire caractérisé par $\delta=0,5$. L'onde est propagée pendant une durée adimensionnelle $\tilde{T} \equiv T\sqrt{g/h}$, fixée ici à $\tilde{T} = 500$. La distance d parcourue par l'onde est en théorie égale à $d=CT$, ou encore $\tilde{d} \equiv d/h = F\tilde{T}$ en adimensionnel. Dans le cas présent ($F \approx 1,21577945$ pour $\delta=0,5$), la distance théorique est $d \approx 607,89 h$ (environ 608 fois la profondeur d'eau).

Les paramètres numériques sont spécifiés de la façon suivante : $\Delta x/h=1/M_x$ pour la discrétisation spatiale, et $\Delta \tilde{t} \equiv \Delta t\sqrt{g/h}=1/M_t$ pour la discrétisation temporelle. On définit le nombre de Courant–Friedrichs–Lewy par $CFL \equiv C_0\Delta t/\Delta x = M_x/M_t$. Le maillage couvre une distance de $700h=700$ m (entre $x/h=-25$ et $x/h=675$) et comprend donc $700M_x$ mailles ($700M_x+1$ nœuds). L'onde solitaire se trouve à l'abscisse $x=0$ à l'instant initial. Afin d'évaluer la précision et la qualité des simulations numériques, on examine l'évolution au cours du temps des quantités suivantes : (i) déphasage de la crête de l'onde par rapport à sa position théorique, (ii) hauteur de l'onde, par rapport à sa valeur initiale, (iii) volume du domaine fluide, (iv) énergie mécanique du domaine fluide.

Une première série de simulations est réalisée en fixant l'ordre des polynômes de Tchebychev $N_T=7$, et la résolution spatiale $M_x=10$ (on a donc $N_x=7001$ nœuds en x). On examine l'effet de la discrétisation temporelle en faisant varier M_t de 4 à 12, ce qui conduit à un pas de temps variant de 0,0266 à 0,0798 s, soit un CFL variant de 0,0833 à 2,5. La figure 1 présente les profils de surface libre à l'instant final ($\tilde{T} = 500$). On peut visualiser nettement l'effet du pas de temps (ou du CFL) : plus celui-ci est petit, plus le déphasage de l'onde par rapport à sa position théorique est réduit, et moins l'amortissement de l'amplitude de l'onde est notable.

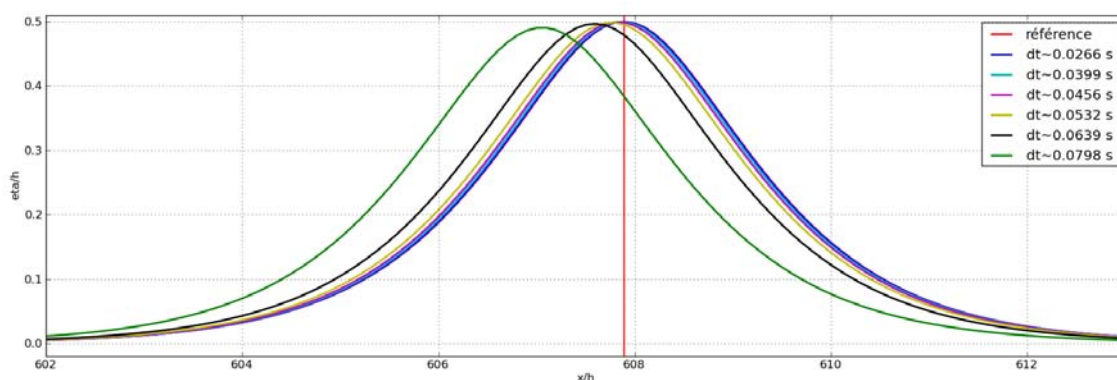


Figure 1. Profils de l'onde solitaire après propagation sur une durée $\tilde{T} = 500$ pour différents pas de temps (CFL variant de 0,0833 à 2,5) avec $N_T=7$ et $M_x=10$.

De façon plus quantitative, la convergence sur le déphasage de la crête de l'onde et la hauteur de l'onde après $\tilde{T} = 500$ est illustrée sur la figure 2 en fonction du pas de temps. On observe une décroissance algébrique de l'erreur, en $(\Delta t)^p$ ou $(M_T)^p$ avec un ordre $p \approx 4,5$, ce qui est cohérent avec le schéma de discrétisation en temps utilisé (Runge-Kutta d'ordre 4).

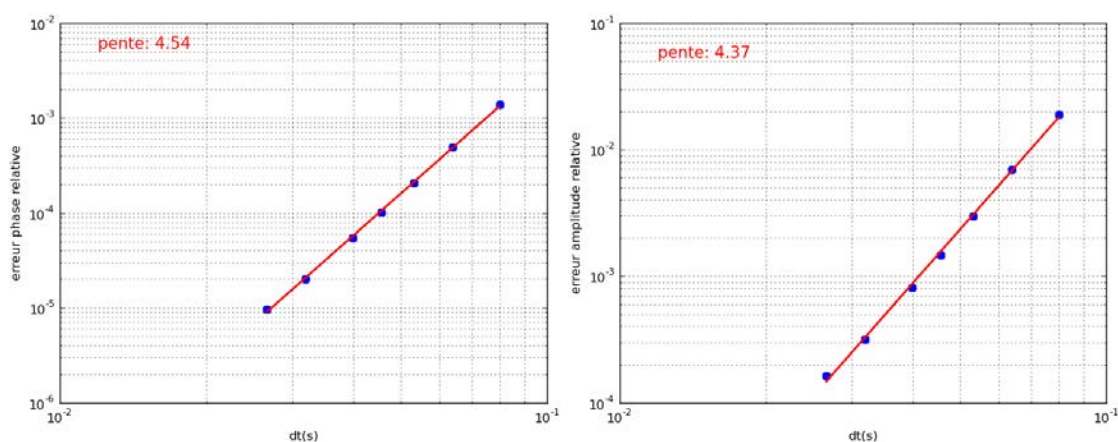


Figure 2. Convergence de l'erreur sur le déphasage de la crête (à gauche) et la hauteur de l'onde (à droite) après une durée $\tilde{T} = 500$ ($N_T=7$, $M_x=10$).

Thème 1 – Hydrodynamique côtière

On observe également que la méthode est stable pour tous les pas de temps testés, y compris jusqu'à un CFL=2,5 ici, bien que les résultats soient de qualité inférieure pour les plus grandes valeurs du pas de temps considérées.

Sur le même cas, nous étudions l'influence de l'ordre N_T des polynômes de Tchebychev retenu dans l'approximation (3) de la variation du potentiel suivant la verticale. Une seconde série de simulations est réalisée en figeant les résolutions horizontale ($M_x=10$) et temporelle ($M_t=8$, soit $\Delta t \approx 0,04$ s et CFL=1,25) à des valeurs qui optimisent le temps de calcul et la précision des résultats. Seul varie l'ordre N_T , entre les valeurs 3 et 15. Les simulations sont réalisées sur une durée adimensionnelle $\tilde{T} = 500$. Sur la figure 3 sont tracés les erreurs sur la position de la crête et la hauteur de l'onde solitaire au temps final (par rapport à la solution donnée par $N_T=15$). On voit sur ces deux graphes que l'erreur décroît très rapidement avec N_T . La convergence est plus rapide qu'une convergence algébrique (qui serait proportionnelle $(N_T)^{-p}$) : elle est de type exponentiel (vitesse de convergence géométrique ici), comme l'indiquent les courbes de tendance tracées, de la forme $\exp(-qN_T)$. On vérifie ici une propriété extrêmement intéressante de la méthode spectrale utilisée sur la verticale : du fait de la convergence exponentielle, il suffit d'ordres N_T peu élevés (typiquement 6 à 8) pour atteindre des erreurs très faibles. Par exemple, sur ce cas avec une valeur $N_T=8$, l'erreur relative sur l'amplitude est de $2 \cdot 10^{-8}$ et celle sur le déphasage en x de $1,5 \cdot 10^{-9}$. Pour des valeurs de N_T supérieures à 9, la décroissance ralentit un peu, avant de marquer un palier à partir de $N_T=13$.

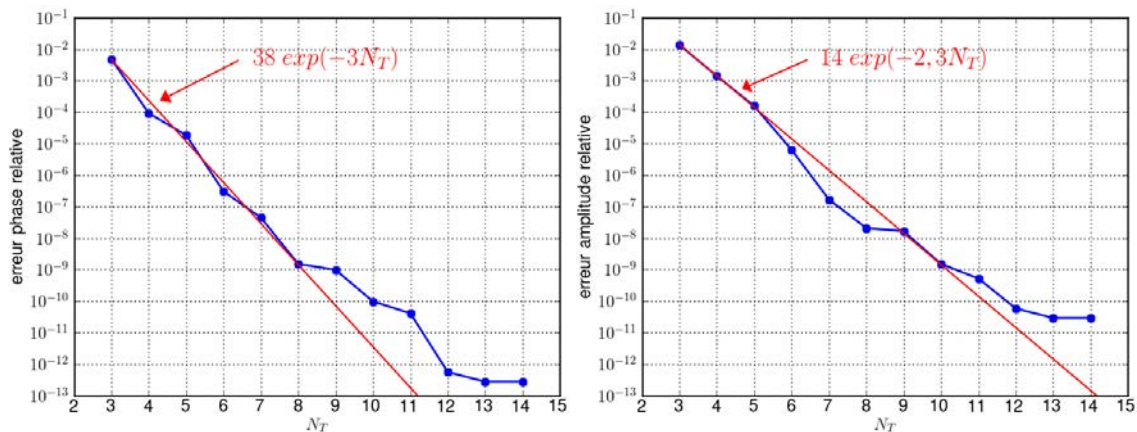


Figure 3. Convergence de l'erreur sur le déphasage de la crête (à gauche) et la hauteur de l'onde (à droite) après une durée $\tilde{T} = 500$ ($M_x=10$, $M_t=8$).

4.2 Propagation de vagues régulières au-dessus d'une barre immergée

DINGEMANS (1994) a réalisé des expériences en canal à vagues sur la propagation de vagues régulières au-dessus d'une barre trapézoïdale immergée (cf. figure 4). Les vagues sont générées à la limite gauche du domaine et se propagent en direction de la barre. Au passage du haut-fond, les vagues se raidissent et leur hauteur augmente. Les interactions non-linéaires génèrent des composantes harmoniques d'ordres élevés, liées au mode

fondamental, conduisant à des profils de vagues asymétriques. Ces harmoniques sont ensuite libérées sur la partie plate du profil, puis après la barre, pour devenir des ondes fortement dispersives se propageant librement au-delà (voir BENOIT & CHAZEL, 2013). On présente ici les résultats du cas A ($H=2,0$ cm ; $T=2,02$ s) pour lequel les ondes incidentes sont relativement longues ($kh=0,67$ au large de la barre) et de cambrure relativement faible ($\varepsilon=kH/2=0,017$).

Les simulations sont réalisées ici avec un pas d'espace $\Delta x=0,05$ m et un pas de temps $\Delta t=T/100=0,0202$ s. Sur la figure 5, les profils de surface libre simulés sont comparés aux mesures sur une durée de 2 périodes de vague sur les 6 dernières sondes (sondes 6 à 11), en considérant 5 valeurs croissantes de N_T (3, 4, 5, 7 et 10).

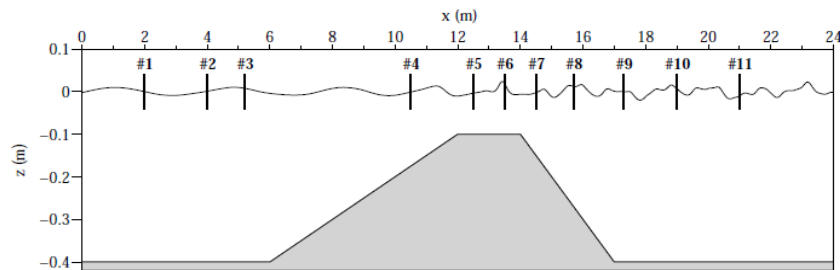


Figure 4. Bathymétrie et positions des sondes des essais de DINGEMANS (1994).

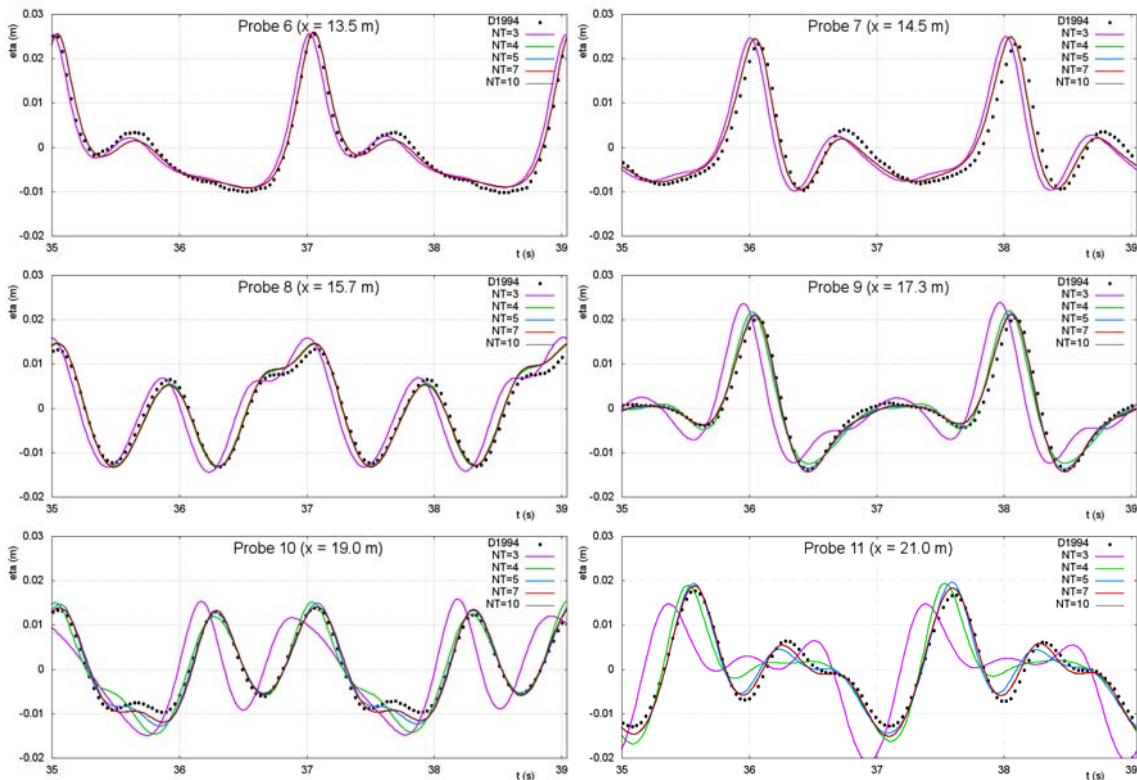


Figure 5. Profils de la surface libre aux sondes 6 à 11 pour le cas A ($H=2,0$ cm ; $T=2,02$ s) de DINGEMANS (1994) pour 5 valeurs de N_T (3, 4, 5, 7 et 10)

Jusqu'à la sonde 7, seule la simulation avec $N_T = 3$ se démarque légèrement des quatre autres, qui sont confondues. Les différences sont progressivement plus marquées pour les sondes 8 à 11, du fait des effets dispersifs plus importants après la barre. En effet, le fait que les harmoniques d'ordres supérieurs se propagent avec leurs propres célérités après la barre (au contraire de la partie située avant la barre où les harmoniques restent liées au mode fondamental) se traduit par des profils de surface libre très variables d'une sonde à l'autre en fonction des phases relatives des harmoniques ainsi libérées. En particulier, aux sondes 10 et 11, on voit nettement que les valeurs $N_T=3$ et 4 s'écartent significativement des mesures, et on peut distinguer quelques différences entre la simulation $N_T=5$ et les simulations $N_T=7$ et 10, qui restent superposées à toutes les sondes, et très proches des mesures. Ces observations confirment également qu'une valeur de N_T comprise entre 6 et 8 (typiquement 7) représente un choix *a priori* optimal en termes de compromis précision/temps de calcul.

5. Conclusions et perspectives

Les cas-tests analysés dans cet article (ainsi que d'autres cas non-présentés ici) ont permis de vérifier la robustesse du modèle numérique proposé, ainsi que sa très grande précision. Avec l'utilisation d'un ordre de polynômes de Tchebychev N_T compris entre 6 et 8 seulement, le modèle montre des capacités non-linéaires et dispersives excellentes, comme illustré ici sur les deux cas présentés. Cela est obtenu grâce à la convergence de type exponentiel de la méthode spectrale utilisée pour la coordonnée verticale, tandis que les ordres de convergence en espace et en temps sont supérieurs ou égaux à 4 grâce aux schémas de discrétisation employés. Le modèle se révèle par ailleurs efficace grâce à l'utilisation d'un solveur linéaire direct externe, et la parallélisation sous MPI.

La prise en compte de la génération d'ondes par des mouvements de fond (tsunami) est déjà opérationnelle et validée. Les travaux futurs concernent l'extension du modèle à deux dimensions d'espace en plan, sur des maillages non-structurés, la modélisation du run-up sur des talus inclinés, ainsi que la représentation du déferlement.

6. Références bibliographiques

- AMESTOY P.R., DUFF I.S., KOSTER J., L'EXCELLENT J.Y., KOSTER J. (2001). *A fully synchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling*. *SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications*, Vol. 23(1), pp 15–41. <http://dx.doi.org/10.1137/S0895479899358194>
- BENOIT M., CHAZEL F. (2013). *Validation expérimentale d'un modèle double-couche pour des vagues côtières non-linéaires et fortement dispersives*. *Revue Paralia*, Vol. 6, pp 7.1–7.16. <http://dx.doi.org/10.5150/revue-paralia.2013.007>

- BENOIT M., YATES M.L., CHAZEL F. (2013). *A comparison of simulation approaches based on the Zakharov equations for nonlinear waves in the coastal zone*. 28th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies (IWWWF 2013), 7-10 avril 2013, L'Isle-sur-la-Sorgue (France).
- CHAZEL F., LANNES D., MARCHE F. (2011). *Numerical simulation of strongly nonlinear and dispersive waves using a Green–Naghdi model*. Journal of Scientific Computing, Vol. 48(1-3), pp 105–116. <http://dx.doi.org/10.1007/s10915-010-9395-9>
- CLAMOND D., DUTYKH D. (2013). *Fast accurate computation of the fully nonlinear solitary surface gravity waves*. Computers & Fluids, Vol. 84, pp 35–38. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.05.010>
- DINGEMANS M. (1994). *Comparison of computations with Boussinesq-like models and laboratory measurements*. Mast-G8M note, H1684, Delft Hydraulics (Pays-Bas).
- GOBBI M.F., KIRBY J.T., WEI G. (2000). *A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 2. Extension to $O(kh)^4$* . Journal of Fluid Mechanics, Vol. 405, pp 181–210. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112099007247>
- KIRBY J.T. (2003). *Boussinesq models and applications to nearshore wave propagation, surf zone processes and wave-induced currents*. Advances in Coastal Modeling, V.C. Lakhan (ed), Elsevier, pp 1–41.
- MADSEN P.A., MURRAY R., SORENSEN O.R. (1991). *A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics*. Coastal Engineering, Vol. 15, pp 371–388. [http://dx.doi.org/10.1016/0378-3839\(91\)90017-B](http://dx.doi.org/10.1016/0378-3839(91)90017-B)
- MADSEN P.A., SCHÄFFER H.A. (1998). *Higher-order Boussinesq-type equations for surface gravity waves: derivation and analysis*. Philosophical Transactions of the Royal Society A, Vol. 356, pp 3123–3184. <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.1998.0309>
- MADSEN P.A., BINGHAM H.B., LIU H. (2002). *A new Boussinesq method for fully nonlinear waves from shallow to deep water*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 462, pp 1–30. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112002008467>
- MADSEN P.A., FUHRMAN D.R., WANG B. (2006). *A Boussinesq-type method for fully nonlinear waves interacting with a rapidly varying bathymetry*. Coastal Engineering, Vol. 53, pp 487–504. <http://dx.doi.org/10.1016/j.coastaleng.2005.11.002>
- NWOGU O.G. (1993). *Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation*. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, Vol. 119, pp 618–638. [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-950X\(1993\)119:6\(618\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-950X(1993)119:6(618))
- TIAN Y., SATO S. (2008). *A numerical model on the interaction between nearshore nonlinear waves and strong currents*. Coastal Engineering Journal, Vol. 50(4), pp 369–395. <http://dx.doi.org/10.1142/S0578563408001879>
- ZAKHAROV V.E. (1968). *Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, Vol. 9(2), pp 190–194. <http://dx.doi.org/10.1007/BF00913182>

Thème 1 – Hydrodynamique côtière

YATES M.L., BENOIT M. (2012). *Modélisation non-linéaire et dispersive des vagues en zone côtière : étude comparative de deux méthodes de simulation précises*. 13èmes Journées de l'Hydrodynamique, 21-23 Novembre 2012, Chatou (France)