



Simulation numérique directe du phénomène de sédimentation à faible nombre de Reynolds

Romuald VERJUS¹, Sylvain GUILLOU¹

1. Laboratoire Universitaire des Sciences Appliquées de Cherbourg (EA4253),
Université de Caen, Esix,
Site Universitaire de Cherbourg, BP 78, 50130 Cherbourg-Octeville, France.
romuald.verjus@unicaen.fr ; sylvain.guillou@unicaen.fr

Résumé :

Les ports et les estuaires sont le siège d'un envasement important. Les modèles de transport à cette échelle nécessitent des équations de fermeture. L'étude de phénomènes hydrosédimentaire à l'échelle de la particule doit permettre d'affiner ces lois. Un modèle numérique direct a été développé pour simuler la dynamique particulaire. La sédimentation bidimensionnelle en milieu confiné de particules cylindriques non-cohésives au sein d'un fluide Newtonien à bas nombre de Reynolds (de l'ordre de 1) est simulée avec un millier de particules. Une analyse des évolutions des différentes interfaces montre le bon comportement du modèle. Le calcul de grandeurs macroscopiques obtenues par moyenne d'ensemble permet de remonter à une loi de chute proche de la formule de Richardson-Zaki.

Mots-clés :

Transport sédimentaire – Sédimentation – Modélisation Numérique Directe – "Direct Forcing Fictitious Domain" méthode

1. Introduction

La simulation des phénomènes de transport particulaire à l'échelle des estuaires et des ports nécessite une modélisation des phénomènes aux plus petites échelles. Il en est ainsi du phénomène de sédimentation paramétré entre autre par la vitesse de chute moyenne dans les modèles classiques (LE NORMANT, 2000) et les efforts en moyennes d'ensembles sur un nuage de particules dans les modèles à deux phases (CHAUCHAT *et al.*, 2009).

La sédimentation de particules rigides non-cohésives a fait l'objet de nombreuses études expérimentales et numériques (GUAZZELLI & HINCH, 2011, et références incluses). La simulation à l'échelle des particules doit permettre de mieux comprendre les phénomènes locaux par la simulation des mouvements de chaque particule avec un minimum de fermetures. C'est la simulation numérique directe pour les écoulements particuliers (WACHS, 2009 et références incluses). Dans ces modèles, la taille de la particule est grande devant la taille de la maille fluide. Pour les écoulements particuliers, on distingue deux grandes familles de modèles numériques directs : ceux

où les particules sont considérées comme des frontières solides et ceux où les particules sont prises en compte en imposant un mouvement de corps rigide à l'intérieur des particules. La première famille regroupe essentiellement les modèles de type ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) (i.e. HU (1996)). Ici seul le domaine fluide est maillé. Une fois que les particules sont déplacées, soit le domaine fluide est remaillé à chaque pas de temps, soit lorsque celui-ci est trop déformé. L'inconvénient majeur de ces modèles est que les étapes de remaillage sont très consommatrices en temps de calcul. La deuxième famille rassemble les méthodes appelées de "Domaines Fictifs". Elles rassemblent, entre autre, la méthode des distributeurs de Lagrange (i.e. GLOWINSKI *et al.* (1999) et la méthode de frontières immergées (i.e. PEKIN (2002)). Le principe général est de résoudre les équations de Navier Stokes sur tout le domaine (qui comprend le fluide et les particules) et de forcer le fluide à l'intérieur de la particule à suivre le mouvement rigide de la particule. Les équations fluides sont résolues, le plus souvent sur un maillage fixe cartésien. La particule est discrétisée à l'intérieur (i.e. Multiplicateur de Lagrange) ou sur son contour (i.e. méthode des frontières immergées) et va se déplacer au cours du temps sur le maillage cartésien. Dans la présente étude, nous approchons le phénomène de sédimentation à l'aide d'un modèle bidimensionnel appartenant à cette deuxième famille, basé sur la "Direct-Forcing/Fictitious-Domain" (DF/FD) méthode de YU & SHAO (2007) développée à partir du code de Simulation Numérique Directe (SND) de GUILLOU & MAKHLOUFI (2007). Nous réalisons, avec ce modèle, une étude de la sédimentation de particules rigides (de l'ordre de 1000) en milieux confinés.

2. Modélisation numérique

Dans la DF/FD méthode, on considère que la phase fluide est régie par les équations de Navier-Stokes et les particules par les lois de Newton. La contrainte de mouvement rigide à l'intérieur des particules est assurée par l'ajout d'une pseudo-force de volume à l'équation de quantité de mouvement. Cette force est déterminée de telle sorte le fluide à l'intérieur de la particule soit contraint par le mouvement du corps rigide. Elle permet de ne pas calculer explicitement à chaque pas temps les forces hydrodynamiques pour la résolution des équations de Newton. Nous rappelons ici les éléments essentiels du modèle.

2.1 Formulation Domaine Fictif

On considère un fluide Newtonien incompressible Ω_f et une particule rigide cylindrique $P(t)$. Pour le fluide, sa masse volumique et sa viscosité dynamique sont notées ρ_f et μ , respectivement. La masse volumique de la particule, son diamètre, son volume, son moment d'inertie, son vecteur vitesse de translation et celui de rotation sont notés ρ_s , V_s , J_s , U et ω respectivement. On introduit les paramètres caractéristiques L_c une

longueur, U_c une vitesse, L_c/U_c pour le temps, $\rho_f U_c^2$ la pression, and $\rho_f U_c^2/L_c$ pour la pseudo-force de volume. Les équations adimensionnées du système s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{\nabla^2 \mathbf{u}}{Re} - \nabla p + \boldsymbol{\lambda} \quad \text{dans } \Omega, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \text{dans } P(t), \quad (3)$$

$$(\rho_r - 1)V_d \left(\frac{d\mathbf{U}}{dt} - \frac{1}{Fr} \frac{\mathbf{g}}{g} \right) = - \int_P \boldsymbol{\lambda} dx, \quad (4)$$

$$(\rho_r - 1) \frac{d(\mathbf{J}_d \cdot \boldsymbol{\omega})}{dt} = - \int_P \mathbf{r} \times \boldsymbol{\lambda} dx, \quad (5)$$

où \mathbf{u} représente le champ de vitesse fluide, p la pression, $\boldsymbol{\lambda}$ la pseudo-force de volume, \mathbf{r} le vecteur position avec comme origine le centre de la particule, Re est le nombre de Reynolds définis par $\rho_f U_c L_c / \mu$, Fr est le nombre de Froude et qui s'écrit $U_c^2 / g L_c$, ρ_r est le rapport des masses volumiques défini par ρ_s / ρ_f , J_d est le moment d'inertie adimensionné défini par $J_s / \rho_s L_c^4$ et V_d est le volume adimensionné défini par V_s / L_c^3 .

2.2 Technique de résolution numérique

Une méthode à pas fractionnaire est utilisée pour découpler le problème (1)-(5) en trois sous-problèmes : le premier servant à prédire les vitesses fluides et la pression, un second permettant de calculer les vitesses des particules et le troisième servant à corriger les vitesses fluides pour qu'elles respectent la contrainte de mouvement rigide à l'intérieur de la particule. L'algorithme de résolution est le suivant :

- Etape 1: Calcul des vitesses fluides et de la pression avec une méthode de projection GUILLOU & MAKHLOUFI (2007)

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\nabla^* p - \frac{1}{2} \left(3(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^n - (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{(n-1)} \right) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^* \right\} + \boldsymbol{\lambda}^n, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0, \quad (7)$$

- Etape 2: Résolution du sous problème pour la particule pour \mathbf{U}^{n+1} , $\boldsymbol{\omega}^{n+1}$, \mathbf{u}^{n+1} et $\boldsymbol{\lambda}^{n+1}$, avec :

- Etape 2.1 : Calcul de \mathbf{U}^{n+1} , $\boldsymbol{\omega}^{n+1}$ dépendant de \mathbf{u}^* et de $\boldsymbol{\lambda}^n$

$$\rho_r V_d \frac{d\mathbf{U}^{n+1}}{dt} = (\rho_r - 1) V_d \left(\frac{d\mathbf{U}^n}{dt} - \frac{1}{Fr} \frac{\mathbf{g}}{g} \right) + \int_P \left(\frac{\mathbf{u}^*}{\Delta t} - \boldsymbol{\lambda}^n \right) dx + F_c^n, \quad (8)$$

$$\rho_r \frac{d(\mathbf{J}_d \cdot \boldsymbol{\omega}^{n+1})}{dt} = (\rho_r - 1) \frac{d(\mathbf{J}_d \cdot \boldsymbol{\omega}^n)}{dt} + \int_P \mathbf{r} \times \left(\frac{\mathbf{u}^*}{\Delta t} - \boldsymbol{\lambda}^n \right) dx, \quad (9)$$

- Etape 2.2 : Calcul de $\boldsymbol{\lambda}^{n+1}$ dépendant de \mathbf{U}^{n+1} , $\boldsymbol{\omega}^{n+1}$, \mathbf{u}^* et de $\boldsymbol{\lambda}^n$

$$\boldsymbol{\lambda}^{n+1} = \frac{\mathbf{U}^{n+1} + \boldsymbol{\omega}^{n+1} \times \mathbf{r} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} + \boldsymbol{\lambda}^n, \quad (10)$$

- Etape 3: Correction de la vitesse fluide \mathbf{u}^{n+1} avec λ^{n+1} et λ^n

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* + \Delta t(\lambda^{n+1} - \lambda^n) , \quad (11)$$

Le premier sous-problème est résolu avec la méthode des différences finies sur un maillage entrelacé décalé et un algorithme de projection (GUILLOU & MAKHLOUFI, 2007). Pour le second sous-problème, la particule est discrétisée avec la méthode "Collocation-Point" (YU *et al.*, 2002) (Cf. figure 1) qui permet d'avoir une distribution de points la plus homogène possible sur la particule, nécessaire pour l'interpolation des variables entre le maillage fixe et celui lié à la particule. En effet, durant la résolution, la vitesse \mathbf{u}^* définie sur le maillage fixe doit être interpolée du maillage fixe sur le maillage de la particule (Etape 2). λ^{n+1} et λ^n sont définies sur le maillage lié à la particule et doivent être interpolées du maillage mobile sur le maillage fixe (Etape 3). Pour cela on utilise la fonction bilinéaire discrète δ (YU & SHAO, 2007) définie en 2D comme suit :

$$\delta_h(\mathbf{r}) = d_h(r_x).d_h(r_y) , \quad (12)$$

où r_x et r_y sont les composantes de \mathbf{r} , et $d_h(\mathbf{r})$ est définie par :

$$d_h(r) = \begin{cases} 1 - \frac{|r|}{h} , & \text{pour } |r| < h \\ 0 , & \text{sinon} \end{cases} \quad (13)$$

ici h représente la taille d'une maille du maillage cartésien. Avec cette fonction, on peut transférer une quantité discrète f entre le maillage Eulérien (cartésien) et le maillage Lagrangien (lié à la particule) comme suit :

$$f_{E \rightarrow L} : f_L(\mathbf{X}_L) = \sum_i f_E(\mathbf{x}_i) \delta_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{X}_L) , \quad (14)$$

$$f_{L \rightarrow E} : f_E(\mathbf{X}_L) = \sum_L f_L(\mathbf{X}_L) \delta_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{X}_L) \Delta V_L^* , \quad (15)$$

où $f_L(\mathbf{X}_L)$ et $f_E(\mathbf{x}_i)$ représentent les valeurs de la quantité discrète f sur un point du maillage Lagrangien de coordonnée \mathbf{X}_L et sur un point du maillage Eulérien de coordonnée \mathbf{x}_i , respectivement. ΔV_L^* est le rapport de l'aire de contrôle associée à chaque nœuds Lagrangien (égale à l'air de la particule divisée par le nombre de points qui la discrétisent) sur h^2 .

Dans le cas de suspensions denses, la discrétisation du problème ne permet pas d'obtenir une assez bonne résolution lorsque les distances entre les particules deviennent faibles. En pratique, une force de répulsion est ajoutée lorsque le gap entre deux particules devient assez faible (de l'ordre de la maille fluide). Dans ce modèle, la force de répulsion de GLOWINSKI *et al.* (1999) est utilisée. Cette force est normale à la zone de contact, les efforts tangentiels sont quant à eux négligés. Elle est définie par :

$$\mathbf{F}_C^{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_p} (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j) (R_i + R_j - d_{i,j} + d_{\min})^2 & \text{si } d_{i,j} \leq R_i + R_j + d_{\min} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (16)$$

où X_i et X_j sont les centres coordonnées des centres des deux particules d'indices i et j . R_i et R_j sont leur rayon. d_{\min} est la distance à partir de laquelle la force de répulsion s'applique et qui est de l'ordre la taille d'une maille fluide. $d_{i,j}$ est la distance entre les centres des particules. ε_p est un petit paramètre de raideur. Pour les contacts avec le mur, cette même force est utilisée mais cette fois-ci, on considère une particule imaginaire qui est tangente avec le mur. Elle est calculée à chaque début de pas de temps et lorsque que les collisions sont multiples, on ajoute toutes les forces de collisions qui sont calculées par paires.

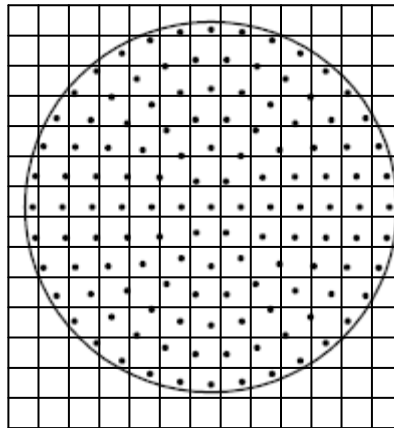


Figure 1. Maillages des domaines fluides et solides.

3. Expériences numériques de sédimentation

YU & SHAO (2007), VERJUS *et al.* (2011) ont appliqué avec succès la DF/FD méthode à des cas de sédimentation pour une particule cylindrique pour une vaste gamme de nombre de Reynolds particulaire définie (variant de 0.1 à 500). Dans cette présente étude, nous nous limitons à des cas à bas nombre de Reynolds ($Re_p < 1$) qui sont largement décrits dans la littérature, mais la méthode s'applique tout aussi bien pour des écoulements beaucoup plus inertiels. Les nombres de Froude et de Reynolds sont calculés à partir des vitesses caractéristiques de chute pour les bas nombres de Reynolds données dans YU & SHAO (2007). Dans le cas de sédimentations de nombreuses particules, ils le sont avec une formulation de la vitesse de type Richardson-Zaki : $U_c = W_t(1 - \phi)^5$, où W_t est la vitesse terminale de chute pour une particule et ϕ la fraction volumique solide. La longueur caractéristique est le diamètre de la particule.

3.1 Sédimentation d'une paire de particules

Nous nous intéressons à un cas test, afin de montrer que le modèle est capable, tout du moins qualitativement, de représenter les structures rencontrées expérimentalement. On considère un domaine fermé sur les côtés et sur le fond avec une condition de non glissement, le dessus est laissé libre. La densité de la particule est égale à 1.1 et celle du fluide à 1. Dans le premier cas, les particules sont placées à mi-distance par rapport au

centre du domaine et leur centre est distant de deux diamètres suivant la verticale. A faible nombre de Reynolds (proche de 1), FENG *et al.* (1994) décrivent l'expérience de JAYAWEERA & MASON (1965) sur la sédimentation de deux cylindres en milieu considéré infini. Le cylindre "suiveur" va accélérer dans le sillage du "meneur" et tourner autour de celui-ci jusqu'à ce que le centre des cylindres soit aligné horizontalement. Une fois cette configuration atteinte, les particules s'écartent l'une de l'autre tout en restant sur l'horizontale. Ici, le rapport de la largeur du domaine sur le diamètre de la particule, qui sera noté W , est fixé à 8 et le domaine est de taille 8×160 . Le pas de temps est fixé à 0.002, la taille de la maille est fixée à $h=1/16$ et $Re_p = 1$.

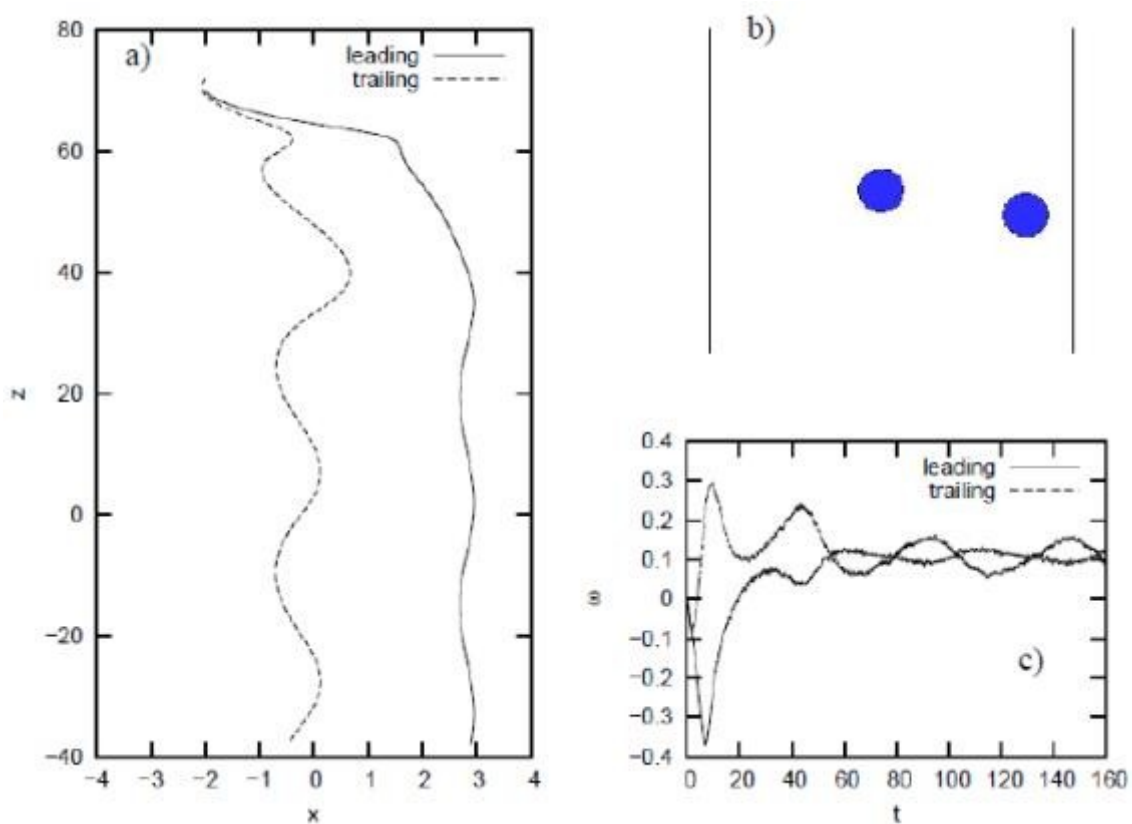


Figure 2. (a) Trajectoires des particules ; (b) Position d'équilibre des particules ; (c) Evolution de la vitesse de rotation adimensionnée en fonction du temps adimensionné

La figure 2a présente les trajectoires des particules. Qualitativement, la position des particules n'est pas identique à l'expérience puisqu'ici les murs verticaux ont une grande influence sur la dynamique des particules et la configuration finale (Cf. Figure 2b) est identique à celle obtenue par FENG *et al.* (1994). La particule "suiveuse" oscille périodiquement autour de l'axe du domaine, tandis que la particule "meneuse" oscille avec une amplitude plus faible proche du mur. Afin de vérifier si cette dissymétrie n'est pas due à la résolution, d'autres cas ont été lancés avec les particules placées de l'autre

côté du domaine, fournissant exactement les mêmes résultats. Ces mêmes auteurs expliquent cela par la rotation des particules qui va entraîner une force de Magnus qui s'équilibre avec la force de répulsion créée par le mur (Cf. Figure 2c). Cette expérience numérique a aussi été réalisée pour $W=11$, le même phénomène est retrouvé dans ce cas.

3.2 Sédimentation de particules

3.2.1 *Présentation du problème*

Dans cette section, nous présentons les résultats de simulation de sédimentation pour un grand nombre de particules. Le but étant dans un premier temps de vérifier si le code est capable de simuler un nombre assez important de particules et de comparer ces résultats avec des grandeurs macroscopiques comme une vitesse de type Richardson Zaki. Le domaine de calcul a les mêmes conditions aux limites que l'étude précédente et les particules sont identiques. On définit le paramètre H qui représente, la hauteur sur laquelle se trouve la suspension. Initialement, la fraction volumique est constante dans tout le domaine et est positionnée comme sur la figure 3. Ici W est égal à 22 et la fraction volumique varie de 0.026 à 0.32. H est fixé à 88 dans un premier temps puis à 176 en longueur adimensionnée pour que la sédimentation ait le temps de s'établir et pour que le volume de contrôle soit assez distant du fond et de l'interface sédiment eau claire. La viscosité cinématique est fixée à $0.25 \text{ cm}^2/\text{s}$, ce qui équivaut à $Re_p=0.1$ pour la sédimentation d'une seule particule. La maille est fixée à $h=1/16$ et le pas de temps varie de 0.0005 à 0.002. Afin d'analyser les résultats, des moyennes spatiales sont réalisées sur des volumes de contrôle ayant comme largeur celle du domaine l et une hauteur L . Chaque volume de contrôle contient N particules. A partir de là, les vitesses moyennes spatiales de chute sont calculées avec :

$$\tilde{U}(t) = \frac{1}{N} \sum_1^N U_i(t) \quad (6)$$

La moyenne temporelle sur les vitesses de chute est calculée avec :

$$\bar{U}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{U}(t) dt \quad (7)$$

Ici T représente la période durant laquelle le volume de contrôle à une fraction volumique très proche de la concentration initiale, c'est à dire que l'on se trouve à l'intérieur de la suspension, assez loin de l'interface suspension-eau claire ou de la forte concentration au niveau du fond.

3.2.2 *Résultats*

L'évolution temporelle de la suspension est présentée sur la figure 3 dans le cas où $W=22$, $\phi=0.32$ et $H=88$ (soit 784 particules). Après quelques instants la structure initiale va se déstabiliser et on distingue trois domaines : un premier qui garde la concentration

de départ, un second proche du fond où la fraction volumique est égale à celle de saturation (d'environ 0.7) et un troisième qui a une fraction volumique intermédiaire. Ce troisième domaine est très visible sur ce cas et quasiment inexistant pour des fractions volumiques de départ assez faibles.

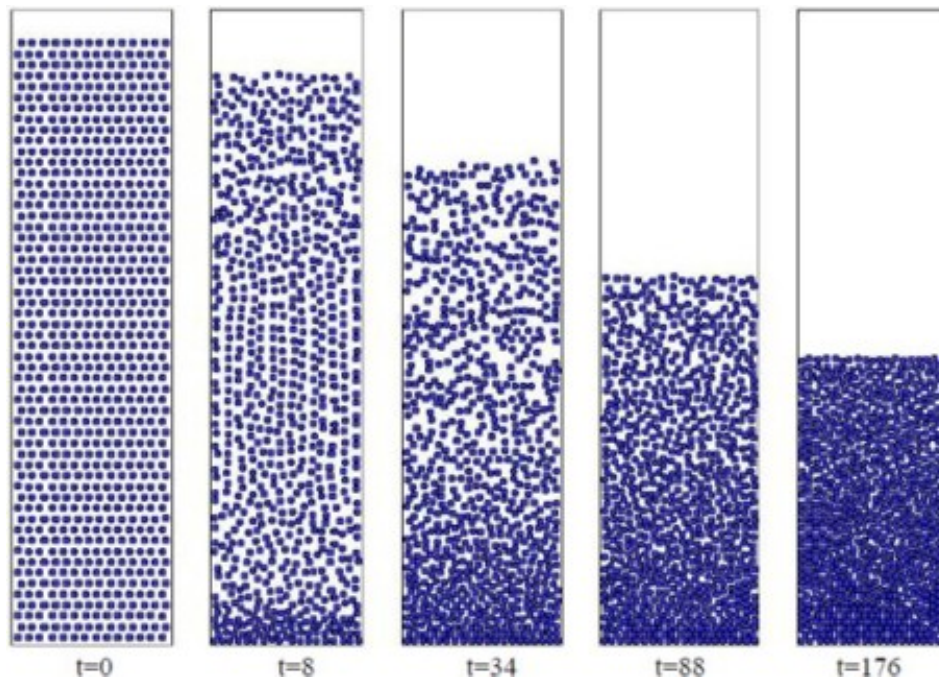


Figure 3. Evolution temporelle de la suspension dans le cas où $W=22$ et une fraction volumique initiale de 0.32 (784 particules)

La figure 4(gauche) montre l'évolution de l'interface sédiment-eau claire au cours du temps pour différentes fractions volumiques. Après la mise en mouvement du sédiment, l'interface chute avec une vitesse constante pour les trois cas. Pour les cas les plus concentré, l'ensemble met beaucoup de temps avant d'être complètement reposé à cause des phénomènes d'arrangement dans le dépôt ainsi qu'au phénomène de chute entravée au niveau de l'interface sédiment-eau claire. Pour la concentration la plus faible, la zone intermédiaire est inexistante, mis à part quelque phénomène d'arrangement dans le sédiment, l'ensemble atteint rapidement un état stable. La Figure 4(droite) présente la variation de la vitesse de chute adimensionnée (moyenne, minimum et maximum) par la vitesse de chute d'une seule particule en fonction de la concentration (0.026, 0.058, 0.103, 0.136, 0.233 et 0.32 ce qui équivaut à 136, 306, 544, 850, 1204 et 1666 particules) pour $H=176$. Pour ces cas, le volume de contrôle est placé au milieu du domaine et $L=44$. Une comparaison est réalisée avec la vitesse de Richardson Zaki avec un exposant de 5. Qualitativement la tendance est assez proche de cette courbe, néanmoins l'exposant qui ajuste le mieux les moyennes est de 7.2 ± 0.6 .

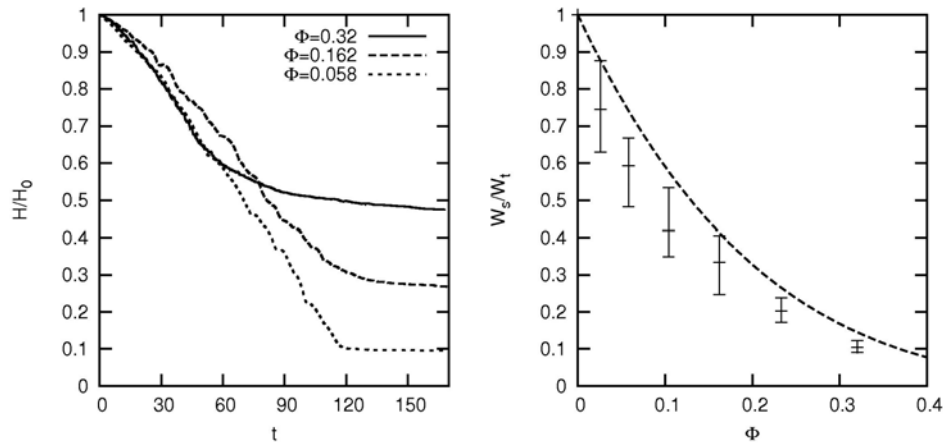


Figure 4. Evolution temporelle de l'interface sédiment eau-claire dans le cas où $W=22$ pour trois fractions volumiques initiale de 0.32, 0.162 et 0.058 (gauche); Evolution du rapport de la vitesse de chute calculée par la vitesse de chute d'une seule particule en fonction de la concentration (droite).

4. Conclusion et perspectives

Dans cet article, des cas de simulations 2D de sédimentation avec un modèle lagrangien sont présentés. Le modèle est capable de reproduire qualitativement des phénomènes rencontrés expérimentalement. L'étude de sédimentation d'un grand nombre de particules a permis de réaliser des moyennes sur les vitesses de chutes et montre que la tendance de la variation de la vitesse de chute en fonction de la fraction volumique est proche de la loi de Richardson Zaki. Quantitativement, il est clair que les simulations 2D ne peuvent reproduire exactement les phénomènes tridimensionnels. HÖFLER & SCHWARZER (2000) mettent en avant que la vitesse de Richardson Zaki ne peut être représentative de phénomènes bidimensionnels car, par exemple, elle va s'annuler pour une fraction volumique maximale de sphères d'environ 0.6 tandis qu'en 2D celle des cylindres atteignent une fraction volumique maximale de 0.7. A titre de comparaison, pour un Reynolds particulaire égal (de l'ordre de 0.1), ces mêmes auteurs ont réalisé des simulations 2D sur un domaine bi-périodique et trouvent un exposant de 3.8. Ce qui pourrait expliquer cette différence, est que les murs ont une forte influence sur la dynamique des particules entraînant une augmentation de la traînée sur les particules. De plus, des études sur de plus grand domaines et avec beaucoup plus de particules permettraient d'utiliser de plus grands volumes de contrôle pour réaliser des moyennes réalistes pour les plus faibles concentrations. Pour cela, il est nécessaire de paralléliser ce code. A plus forte concentration, il est nécessaire de prendre un modèle de collision qui respecte plus la dynamique particulaire.

5. Références bibliographiques

- CHAUCHAT J., GUILLOU S., BARBRY N., NGUYEN K.D. (2009). *Simulation of the turbidity maximum in the Seine estuary with a two-phase flow model*. Comptes Rendus Géosciences., 341(7), 505-512. doi:10.1016/j.crte.2009.04.002
- FENG J., HU H. H., JOSEPH D.D. (1994). *Direct simulation of initial-value problems for the motion of solid bodies in a Newtonian fluid. 1. Sedimentation*, J. Fluid Mech., 261, pp 95–134. doi:10.1017/S0022112094000285
- GLOWINSKI R., PAN T.-W., HESLA T.I., JOSEPH D.D. (1999). *A Distributed Lagrange multiplier/fictitious domain for particulate flows*. Int. J. of Multiphase Flow, 25, pp 755-794. doi:10.1016/S0301-9322(98)00048-2
- GUAZZELLI E., HINCH E.J. (2011). *Fluctuations and instability in sedimentation*. Annu. Rev. Fluid Mech., 43, pp 97-116. doi:10.1146/annurev-fluid-122109-160736
- GUILLOU S., MAKHLOUFI R. (2007). *Effect of a shear-thickening rheological behaviour on the friction coefficient in a plane channel flow: A study by Direct Numerical Simulation*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 144, pp 73-86. doi:10.1016/j.jnnfm.2007.03.008
- HÖFLER K., SCHWARZER S. (2000). *Navier–Stokes simulation with constraint forces: finite-difference method for particle-laden flows and complex geometries*. Phys. Rev. E, 61(6), pp 7146–7160. doi:10.1103/PhysRevE.61.7146
- HU H. H. (1996). *Direct simulations of flows of solid–liquid mixtures*. Int. J. Multiphase Flow 22, pp 335-352. doi: 10.1016/0301-9322(95)00068-2
- JAYAWEERA K.O.L.F., MASON B.J. (1965). *The behaviour of freely falling cylinders and cones in a viscous fluid*. J. Fluid Mech., 22, pp 709–720. doi:10.1017/S002211206500109X
- LE NORMANT C. (2000). *Three dimensional modelling of cohesive sediment transport in the Loire estuary*. Hydrological Processes, 14, pp 2231-2243. doi:10.1002/1099-1085(200009)14:13<2231::AID-HYP25>3.0.CO;2-#
- PESKIN C. (2002). *The immersed boundary method*. Acta Numerica, pp 479-517. doi: 10.1017/S0962492902000077
- VERJUS R., GUILLOU S., AHAMADI M. (2011). *Simulation of sedimentation of rigid particle suspensions: Towards a multi scale analysis*. International conference "Two-phase modelling for sediment dynamics", Paris, 26-28 April, 4 p.
- WACHS A. (2009). *A DEM-DLM/FD method for direct numerical simulation of particulate flows: Sedimentation of polygonal isometric particles in a Newtonian fluid with collisions*. Computers & Fluids, 38(8), pp 1608–1628. doi:10.1016/j.compfluid.2009.01.005
- YU Z., PHAN-THIEN N., FAN Y., TANNER R.I. (2002). *Viscoelastic mobility problem of a system of particles*, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 104, pp 87-124. doi: 10.1016/S0377-0257(02)00014-9
- YU Z., SHAO X.S. (2007). *A direct-forcing fictitious domain method for particulate flows*, Journal of computational physics, 227, pp 292-314. doi:10.1016/j.jcp.2007.07.027