

Etude numérique pour la formation et la migration de structures sous-marines : application à la plage de Rousty

Khouane MEFTAH³, Abdellatif OUAHSINE^{1,3}, Hassan SMAOUI³, Philippe SERGENT^{2,3}

¹ Laboratoire Roberval, UMR-CNRS 6253,
Université de Technologie de Compiègne, Centre de Recherche Royallieu
BP 20529 - 60205 Compiègne cedex
ouahsine@utc.fr

² Centre d'Etudes Techniques Maritimes Et Fluviales, DRIM
2, Bd. Gambetta, B.P. 60039, Compiègne Cedex F-60321,
philippe.sergent@equipement.gouv.fr

³ Laboratoire d'Hydraulique Numérique,
Université de Technologie de Compiègne, 60205 Compiègne cedex
meftahkhouane@yahoo.fr, hassan.smaoui@usa.com

Résumé :

Afin de simuler la morphodynamique de plages à barres et leur évolution depuis la zone de shoaling jusqu'à la zone de swash, un modèle hydrodynamique en éléments finis (Reflux2dv), couplé à un modèle sédimentaire et d'évolution du fond, est présenté. Ce modèle est basé sur les équations de Boussinesq étendues et utilise des schémas numériques à Variation Totale Décroissante (TVD). La pertinence du modèle à simuler l'évolution des profils bathymétriques au cours de la formation puis la migration d'une barre est testée sur un cas test expérimental issu de Dette et al. 2002. Une application de ce couplage est effectuée sur le cas réel de la plage de Rousty (delta du Rhône).

Abstract :

To simulate the beach morphodynamics and the behaviour of nearshore bars and their evolution, from the shoaling to the swash areas, an hydrodynamic model based on the finite elements (Reflux2dv), coupled with a sedimentary model of the bathymetric evolution, is presented. This model is based on the extended Boussinesq equations and uses the Total Variation Diminishing schemes (TVD). The relevance of the model to simulate the changes in the bathymetric profile during formation and migration of a bar is carried out by using the experimental test done by Dette et al. 2002. An application of this coupling is done in the real case of the Rousty beach (delta of the Rhone).

Mots-clés :

Couplage hydrosédimentaire – Schémas numériques TVD – Migration des barres

1 Introduction

Afin de mieux comprendre les structures morphodynamiques des plages à barres et les processus d'évolution de ces barres, la recherche actuelle tente de mieux paramétrer les modèles numériques de morphodynamique côtière, tout en tenant compte des processus de charriage de sédiments et de déferlement des vagues. Cependant, le processus de déferlement joue un rôle prédominant sur le transport sédimentaire et sur la stabilité de la solution numérique. Il est donc important de bien prendre en compte ce processus complexe ainsi que ses conséquences immédiates liées à la qualité de la solution calculée.

Le but de cette recherche est d'affiner la propagation de la houle dans la zone du déferlement, tout d'abord par l'amélioration du comportement dispersif de la houle en présentant un modèle Reflux2DV basé sur les équations de Boussinesq étendues (Meftah, et al., 2004), ensuite par l'adaptation de schémas numériques (TVD) dits limiteurs de pentes (Ouahsine et Smaoui, 1999). En effet, le déferlement crée des discontinuités de la solution et génère de forts gradients, conduisant aux instabilités des schémas numériques classiques.

2 Modèle pour l'hydrodynamique : Reflux 2DV

Ce modèle, développé à l'Université de Technologie de Compiègne (Meftah, 1989), est basé sur les équations de Boussinesq étendues et adopte une approche mixte dite h-s. Le principe de la méthode **h-s** est d'exprimer la vitesse en une série de fonctions qui dépendent de la variable verticale et de vitesses qui dépendent de la variable horizontale:

$$u(x, z, t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(z, h) u_i(x, t) \quad (1)$$

où $\phi_i(z)$ est une base de fonctions prises ici sous forme de polynômes de Legendre, en introduisant les transformations suivantes :

$$\phi_i(z) = \Phi_i(\xi) \quad \text{avec} \quad \Phi_i(\xi) = \sqrt{2i-1} P_i(\xi), \quad (2)$$

avec

$$\xi = 2 \frac{z - z_f}{h - z_f} - 1, \quad P_1(\xi) = 1, \quad P_i(\xi) = \frac{1}{(i-1)! 2^{i-1}} \frac{d^{i-1}}{d\xi^{i-1}} (\xi^2 - 1)^{i-1}, \quad (3)$$

z_f désigne la cote du fond, et h le niveau de la surface libre.

Le système d'équations du modèle Reflux2DV, s'écrit (voir Meftah, 1989):

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \mathbf{S}, \\ \mathbf{U}(x, 0) = \phi(x) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0 \quad (4)$$

Où \mathbf{U} est un vecteur défini par: $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}$, $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} Hu \\ \frac{u^2}{2} + gh + \alpha(u-c)^2 \end{pmatrix}$ désigne le flux, et $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{H^2}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - \frac{H}{2} \frac{\partial z_f}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \frac{g|u|u}{HC_h^2} - \frac{\tau_s}{H} \end{pmatrix}$ le vecteur terme source, où

C_h est le coefficient de Chézy, τ_s la contrainte dû au vent, et $H = h - z_f$.

2.1 Modèle de déferlement

Dans le présent travail le déferlement est pris en compte par l'intermédiaire du terme: $\alpha(u - C)^2$, où $C = 1,3 (gH)^{1/2}$ la célérité du rouleau avec g est la gravité,

et $\alpha = \frac{\delta f_\delta}{H - \delta f_\delta}$ où δ désigne l'épaisseur initial du rouleau défini

géométriquement en introduisant une pente critique égale à $\tan \phi$ au delà de laquelle on suppose que le déferlement aura lieu (voir Fig. 1). f_δ est un facteur de proportionnalité utilisé pour amplifier le volume de l'épaisseur initial δ du rouleau.

Ce modèle de déferlement, de type 'Surface Roller Concept' (Madsen et al. 1998), consiste à analyser géométriquement les pentes de chaque vague pour tous les pas de temps et à comparer ces pentes avec une pente critique au-delà de laquelle on considère que la vague déferle (Fig. 1).

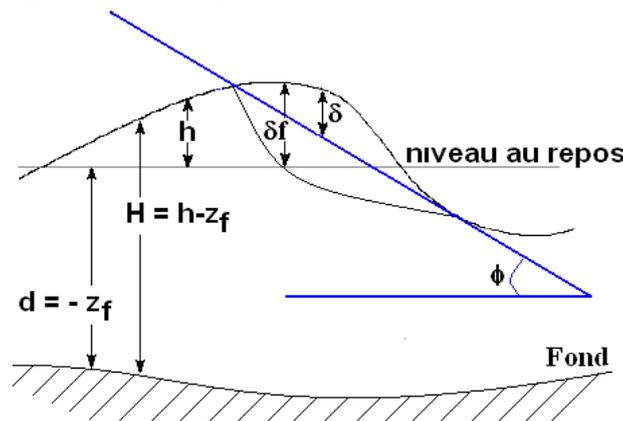


Figure 1. Présentation schématique d'un rouleau déferlant.

Le déferlement a lieu quand la pente locale de la surface libre dépasse l'angle critique de valeur ϕ_B . Pour le déferlement 'Glissant', $\phi_B = 20^\circ$. Après le début de déferlement du premier rouleau, l'angle critique de ce dernier varie de ϕ_B à ϕ_0 en suivant une loi exponentielle (Schäffer et al. (1993)) :

$$\tan \varphi(t) = \tan \varphi_0 + (\tan \varphi_B - \tan \varphi_0) \exp\left(-\ln(2) \frac{t-t_B}{t^*}\right) \quad (5)$$

t_B est l'instant où le déferlement commence et t^* est un temps caractéristique exprimant le développement du rouleau. Le rouleau "meurt" et disparaît lorsque φ est inférieur à φ_0 . On prend par défaut le jeu de paramètres suivant, avec T la période de l'onde incidente (Schäffer et al. (1993)) :

$$((\varphi_B, \varphi_0, t^*, f_\delta) = (20^\circ, 10^\circ, T/5, 1.5) \quad (6)$$

3 Méthodes numériques et validations

3.1 Schémas à Variation Totale Décroissante (TVD)

Dans des zones côtières, les irrégularités de la morphologie du fond et les non-linéarités des processus étudiés donnent naissance à de forts gradients des vitesses et des hauteurs d'eau. Ainsi, malgré l'efficacité des modèles de Boussinesq dans de nombreuses applications, les schémas classiques comme Lax-Wendroff ou Upwind exhibent de la dispersion ou de la diffusion numérique, ce qui altère la qualité de la solution calculée voire la rend instable.

Le but de cette section est de raffiner la solution numérique dans les zones présentant de forts gradients en utilisant des schémas à Variation Totale Décroissante (TVD). En discrétisant le système (4), on obtient :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \lambda \left(\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^{Tvd} - \mathbf{f}_{i-\frac{1}{2}}^{Tvd} \right) \quad (7)$$

où $\lambda = \Delta t / \Delta x$. avec Δt et Δx sont les pas de temps et d'espace respectivement.

$$\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^{Tvd} = \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^{LaxW} - (\bar{\mathbf{I}} - \Psi_{i+1/2}) \left(\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^{LaxW} - \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^{Up} \right) \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^{LaxW} &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{A}_{i+1/2} (\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n) - \lambda |\mathbf{A}_{i+1/2}|^2 (\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n) \right] \\ \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^{Up} &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{A}_{i+1/2} (\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n) - |\mathbf{A}_{i+1/2}| (\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n) \right] \end{aligned} \quad (8b)$$

$\Psi_{i+1/2}$ est le limiteur de pente et $\bar{\mathbf{I}}$ la matrice identité. L'indice 'Up' désigne Upwind et l'indice 'LaxW' désigne Lax-Wendroff. $|\mathbf{A}_{i+\frac{1}{2}}| = \mathbf{R}_{i+\frac{1}{2}} |\mathbf{D}_{i+\frac{1}{2}}| \mathbf{R}_{i+\frac{1}{2}}^{-1}$ où $\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \partial \mathbf{f}(\mathbf{U}) / \partial \mathbf{U}$ est la matrice jacobienne avec $\mathbf{R}_{i+1/2}$ la matrice de passage formée de vecteurs propres et \mathbf{D} la matrice diagonale formée des valeurs propres :

- si $\Psi_{i+1/2} = \mathbf{0}$ on obtient le schéma Upwind
- si $\Psi_{i+1/2} = \bar{\mathbf{I}}$ on obtient le schéma Lax-Wendroff

3.2 Concept de la Variation Totale Décroissante (TVD)

La variation totale de la solution discrète est définie par:

$$TV(\mathbf{U}^n) = \sum_i |\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n| \quad (9)$$

Le schéma est dit à Variation Totale Décroissante (TVD) si :

$$TV(\mathbf{U}^{n+1}) \leq TV(\mathbf{U}^n) \quad (10)$$

En écrivant la solution discrétisée sous forme incrémentale :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - C_{i+1/2}^n (\mathbf{U}_i^n - \mathbf{U}_{i-1}^n) + D_{i+1/2}^n (\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n) \quad (11)$$

le schéma (11) est à Variation Totale Décroissante (TVD) si les conditions suivantes sont vérifiées (Harten, 1983) :

$$C_{i-1/2}^n \geq 0, D_{i+1/2}^n \geq 0 \text{ et } C_{i-1/2}^n + D_{i+1/2}^n \leq 1 \quad (12)$$

Pour pouvoir appliquer les conditions TVD, on réécrit la solution discrétisée en fonction du limiteur de pente Ψ en utilisant (8), soit :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - u \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\Psi(\theta_{i+1/2})}{\theta_{i+1/2}} - \frac{1}{2} \Psi(\theta_{i-1/2}) \right] (\mathbf{U}_i^n - \mathbf{U}_{i-1}^n) \quad (13)$$

Par analogie avec (11) on déduit de (13) que :

$$C_{i-1/2}^n = u \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\Psi(\theta_{i+1/2})}{\theta_{i+1/2}} - \frac{1}{2} \Psi(\theta_{i-1/2}) \right] \text{ et } D_{i+1/2}^n = 0 \quad (14)$$

En utilisant les conditions (12) en déduit de (14) l'inégalité suivante:

$$\left| \frac{\Psi(r)}{r} - \Psi(s) \right| \leq 2 \quad \forall r, s \quad (15)$$

puis en appliquant les contraintes suivantes :

$$\Psi(r) > 0 \text{ et } \Psi(r) = 0 \text{ pour } r < 0 \quad (\text{Sweby, 1984}) \quad (16)$$

le schéma est TVD si le limiteur Ψ vérifie

$$0 \leq \frac{\Psi(r)}{r} \leq 2 \text{ et } 0 \leq \Psi(r) \leq 2 \text{ avec } r = \frac{\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n}{\mathbf{U}_i^n - \mathbf{U}_{i-1}^n} \quad (17)$$

Dans les présentes applications, on utilisera les formes suivantes du limiteur Ψ :

$$\begin{aligned} \text{Minmod: } & \Psi(r) = \max(0, \min(1, r)) \\ \text{Superbee: } & \Psi(r) = \max(0, \min(1, 2r), \min(2, r)) \\ \text{Van Leer: } & \Psi(r) = (r + |r|) / (1 + |r|) \\ \text{MUSCL: } & \Psi(\theta) = \max(0, \min((1+r)/2, 2, 2r)) \end{aligned} \quad (18)$$

4 Modèle d'évolution du fond

La conservation de la quantité de sédiments se traduit par l'équation d'évolution :

$$(1-p) \frac{\partial Z_f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_s = E_a - D_a \quad (19)$$

avec $p=0.4$ est la porosité des fonds ; $E_a - D_a = 0$; Z_f la cote des fonds et \vec{q}_s le débit solide défini par le modèle de transport suivant (Bailard, J. ,1981):

$$\vec{q}_s = \frac{f_{cw}}{g(d-1)} \left(\frac{\varepsilon_c}{\tan \phi} \langle |\vec{u}|^2 \vec{u} \rangle + \frac{\varepsilon_s}{W_c} \langle |\vec{u}|^3 \vec{u} \rangle \right) \quad (20)$$

où $\varepsilon_c = 0.02$, $\varepsilon_s = 0.1$; ϕ angle de frottement ($\tan \phi = 0.63$). W_c est la vitesse de chute; $d = \rho_s / \rho_w \approx 2.6$ densité relative; $\vec{u}_t = \vec{U}_c + \vec{U}_m$; U_m courant moyen; U_c courant orbital ; $\langle \rangle$ moyenne sur une période de la houle; f_{cw} coefficient de frottement qui tient compte des interactions houle-courant:

$$f_{cw} = X_u f_c + (1 - X_u) f_w \text{ avec } X_u = \frac{U_c}{U_c + U_w} \quad (21)$$

5 Tests numériques et validations

5.1 Test 1: Académique d'une pente de plage

L'objectif de ce test est de vérifier la pertinence des schémas numériques TVD lorsque la pente de la plage devient raide. De ce fait on considère un profil du fond de la plage sous la forme :

$$z_b(x) = (y_{\max} - y_{\min}) \tanh\left[\frac{x - x_0}{\delta}\right] + y_{\min} \quad (22)$$

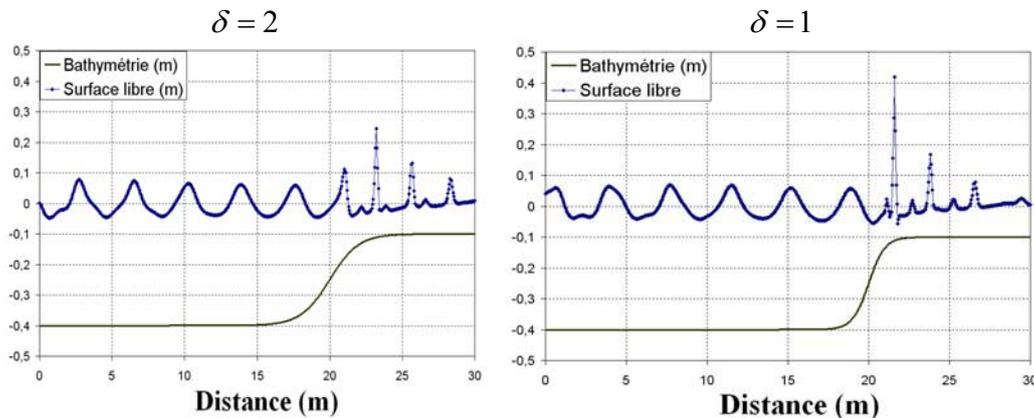


Figure 2. Surface libre calculée par le schéma de Lax-Wendroff

Les simulations numériques effectuées avec le schéma Lax-Wendroff, montrent qu'au fur et à mesure que la pente du fond augmente (δ diminue), l'amplitude de

la surface libre s’amplifie (Fig.2). Cette amplification de l’amplitude de la solution conduit à l’instabilité du modèle numérique.

En utilisant des schémas numériques (TVD), cette amplification est réduite, ceci quelle que soit la valeur de δ et donc la forme de la pente du fond (Fig. 3).

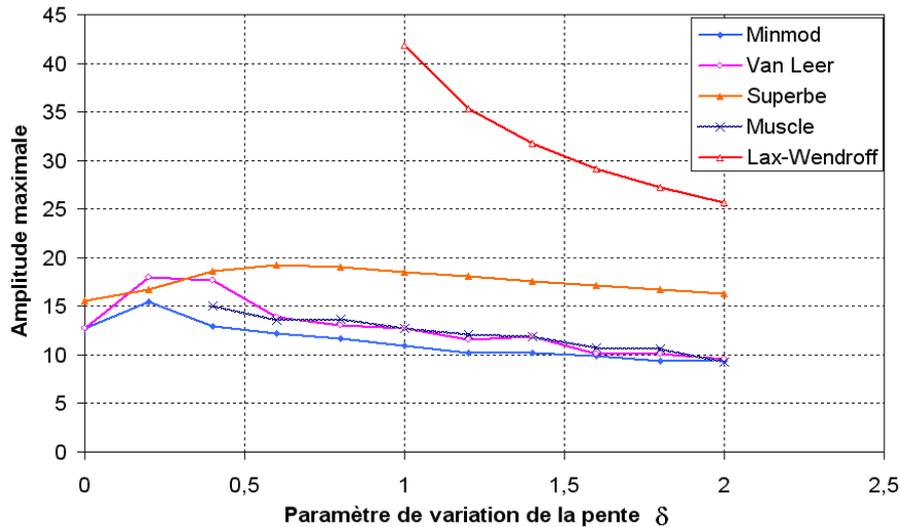


Figure 3. Variation de l’amplitude maximale en fonction de la pente δ

5.2 Test 2: Expérience de Dette et al 2002

On cherche à reproduire les expériences en canal (tests A3) menées par Dette et al. 2002. Le sable est de diamètre moyen $d_{50} = 0,3$ mm et la vitesse de chute $w_s = 0.042$ m/s. Une houle monochromatique de hauteur 1m et période 5s se propage au-dessus du profil initial qui suit la loi $h = 0,12x^{(2/3)}$, où h est la hauteur d’eau et x la distance au rivage (Fig. 4).

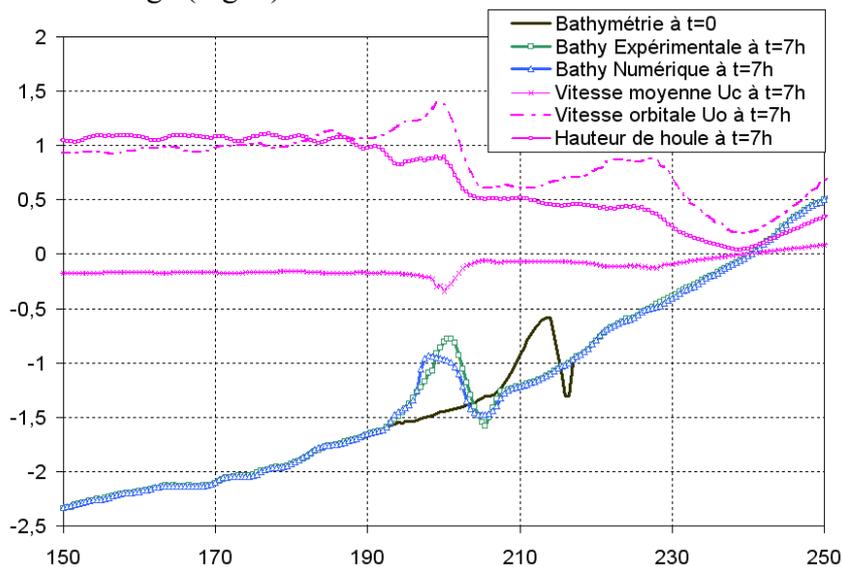


Figure 4. Comparaison de la solution expérimentale avec la solution calculée
En couleur noire : Profil initial de l’expérience de Dette et al.(2002)

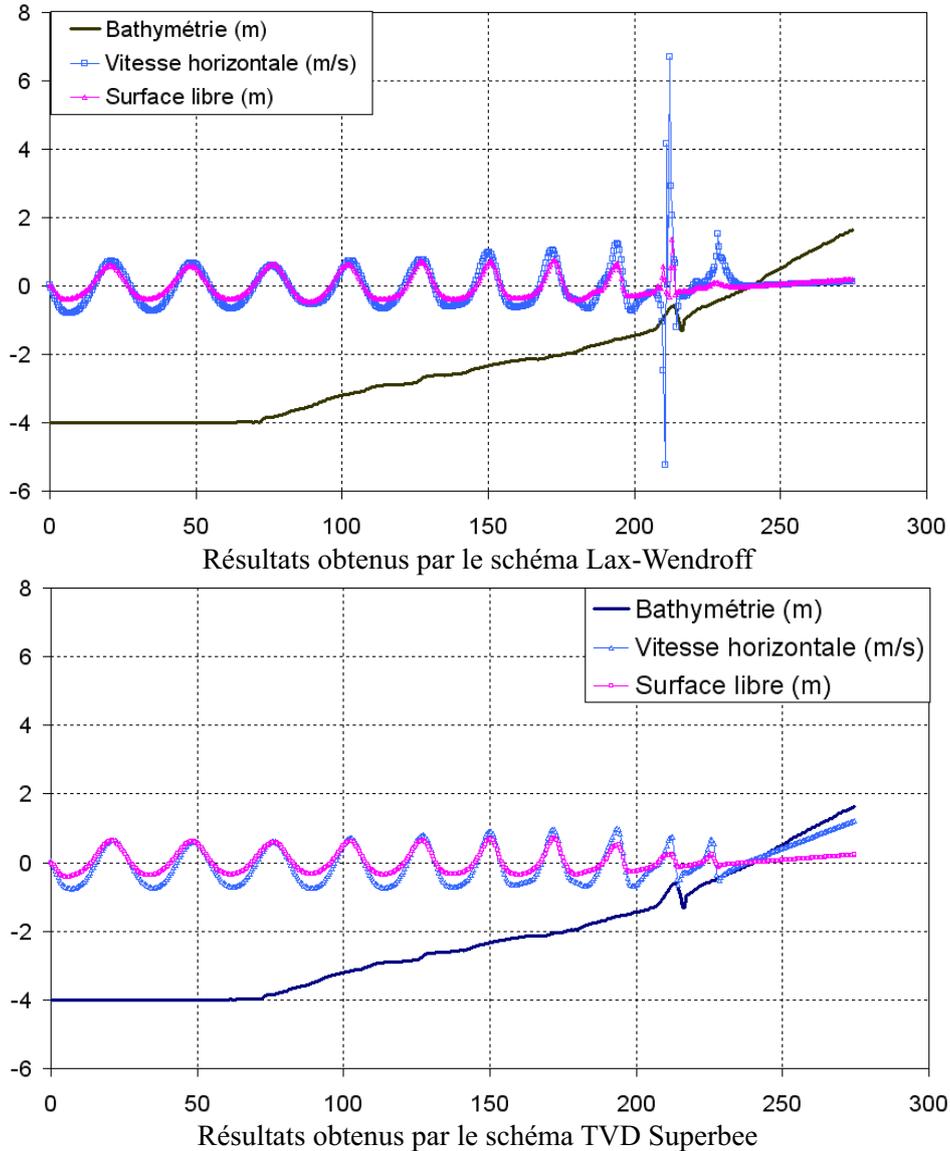


Figure 5. Solution calculée en fonction du schéma numérique utilisé

La figure (5) présente la comparaison entre les solutions numériques obtenues par le schéma de Lax-Wendroff et un schéma TVD (Superbee). On remarque qu'à l'approche de la côte l'amplitude de l'onde présente une légère irrégularité. Par son caractère dispersif, le schéma de Lax-Wendroff amplifie fortement l'amplitude de l'onde. Notons, que le schéma TVD avec le limiteur Superbee reproduit de manière satisfaisante les deux solutions (surface libre et vitesse). Ce résultat conforte l'idée de base qui stipule que les schémas TVD ont été conçus pour éliminer la dispersion numérique due aux erreurs de troncature.

6 Application à l'étude de la plage de Rousty en Camargue

Nous proposons de reprendre cet objectif de modélisation cross-shore de la plage du Rousty pour laquelle des mesures sont disponibles (collectées au cours du programme LITEAU 1), pour la période entre le 28 février et le 17 mars 2001. Cette période est marquée par 6 tempêtes avec des hauteurs de houle dépassant 1,5m (2 ont une hauteur de 2,5m). Nous cherchons à reproduire cette situation manifestement érosive. Les paramètres utilisés dans cette modélisation sont : le pas d'espace $\Delta x = 0.5$ m ; la longueur du profil $L = 535$ m et le pas de temps $\Delta t = 0.01$ s . La hauteur de la houle propagée est de : $H = 1,1$ m et la période de $T = 5$ s.

Les résultats obtenus (Fig. 6), montrent que le modèle proposé reproduit assez bien l'évolution et le déplacement des deux barres mesurées. Toutefois, on constate au cours du temps une diffusion du profil général (Fig. 6 – bas).

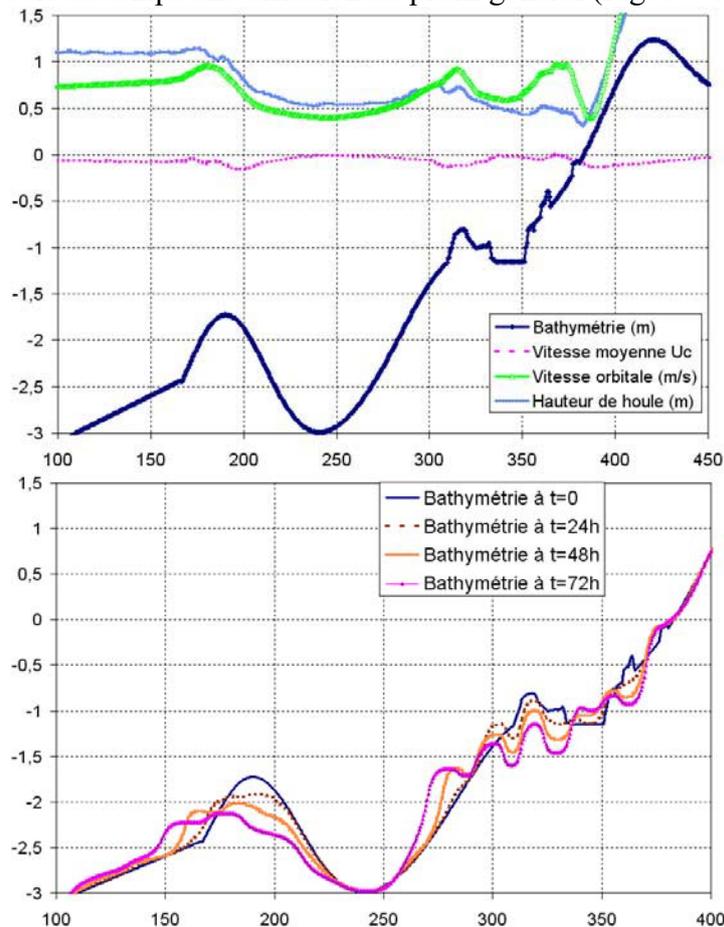


Figure 6 : Morphodynamique du profil de Rousty (Camargue), après 72h
 Courbe bleue : bathymétrie initiale du 28 Février 2001.

7 Conclusions

Pour simuler la morphodynamique de plages à barres et leur évolution suivant différentes conditions hydrodynamiques, un couplage du modèle Reflux2DV avec un modèle de transport sédimentaire est effectué. Les résultats obtenus montrent que des instabilités numériques apparaissent en utilisant des schémas numériques classiques de type Upwind ou Lax-Wendroff. En utilisant des schémas numériques à Variation Totale décroissante (TVD), ces instabilités disparaissent et une amélioration notable de la solution calculée est observée. La pertinence de ce couplage hydro-sédimentaire a été validée tout d'abord sur un cas test expérimental en canal, issu de Dette et *al.* (2002), ensuite sur un cas test réel de la plage de Rousty en Camargue.

8 Références bibliographiques

1. Bailard, J. (1981). Identification of intense, intermittent coherent motions under shoaling and breaking waves *J. Geophys. Res.*, 86(C11): 10938-10954
2. Dingemans M.W. (1994). Comparison of computations with Boussinesq-like models and laboratory measurements. Mast-G8M note, Project 1
3. Dette H.H., Larson M., Murphy J., Newe J., Peters K., Reniers A. et Steetzel H. (2002), «Application of prototype flume tests for beach nourishment assessment», *Coast. Eng.*, vol. 47, n°2, p 137-177
4. Grant W.D. and Madsen O.S., (1979). Combined wave and current interaction with a rough bottom, *J. Geophys. Res.*, 84 (C4): 1797-1808
5. Harten A.(1983), High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, *J. Comput. Phys.*, vol .49, pp 357–393.
6. Madsen P.A., Schäffer H.A. (1998). Higher order Boussinesq-type equations for surface gravity waves : derivation and analysis. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, vol. 356, p 3123-3184
7. Meftah K. (1998). Modélisation tridimensionnelle de l'hydrodynamique et du transport par suspension. Thèse de l'Université de Technologie de Compiègne
8. Meftah K., Sergent P. et Gomi P. (2004). Linear analysis of a new type of extended Boussinesq model. *Coast. Eng.*, vol. 51, p 185-206.
9. Morellato, D., Sabatier, F., Pons, F., Gaufres, P., (2004), Comparaison de modèles cross-shore d'érosion des plages (Site de Rousty, Delta du Rhône, France). VIII^o Journées Nationales Génie Côtier – Génie Civil, Compiègne.
10. Ouahsine A. et Smaoui H. (1999). Flux-limiter schemes for oceanic tracers : Application to the English Channel tidal model. *J. Computer Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 179 3-4 pp. 307-325.
11. Schäffer, H.A., Madsen, P.A. and Deigaard, R., 1993. A Boussinesq model for waves breaking in shallow water. *Coastal Engineering* 20, pp. 185–202.
12. Sweby, P.K (1984). High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic, Conservation Laws, *SIAM J. Numer. Anal.*, 21, pp 995–1011.