

## Un nouveau modèle pour la simulation du phénomène de découverture/recouvrement sur des bathymétries complexes

F.Marche<sup>1</sup>, P.Bonneton<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *ATER au Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Bordeaux, UMR CNRS 5805, Université de Bordeaux I, France. Tél : 05 40 00 21 42, fabien.marche@math.u-bordeaux1.fr*

<sup>2</sup> *Chargé de Recherche du CNRS au Département de Géologie et d'Océanographie, UMR CNRS 5805, Université de Bordeaux I, France. Tél : 05 40 00 29 65, p.bonneton@epoc.u-bordeaux1.fr*

### Résumé

Nous présentons dans cet article un nouveau modèle numérique de type Saint-Venant permettant de simuler la propagation d'ondes longues dans la zone littorale. En particulier, l'utilisation d'un schéma Volumes Finis récent de type "équilibre" permet de bien prendre en compte les fortes variations de topographie, tandis qu'un traitement original des phénomènes de recouvrement/découverte, dans un contexte bi-dimensionnel horizontal (2DH), autorise un calcul précis et robuste des mouvements de la ligne d'eau. Des validations s'appuyant sur des solutions analytiques sont effectuées, puis une application est présentée.

### Abstract

In this paper we introduce a new numerical Finite Volumes model for shallow water flows and the simulation of long waves propagation in the coastal area. The use of a recent well-balanced scheme allows to accurately take into account strong variations of topography. A well-suited algorithm for wetting and drying phenomenon leads to an accurate and robust computation of the moving shoreline in a 2DH framework. Several assessments are performed relying on analytical solutions and a specific application is introduced.

**Mots clefs** : Saint-Venant, topographie, schéma équilibre, ligne d'eau

### 1. Introduction

Les processus de déferlement dans la zone de surf conduisent à des phénomènes de distorsion des vagues et à la formation de fronts d'onde particulièrement raides. Il est classique d'estimer la dissipation dans les vagues ayant déferlé en s'appuyant sur la théorie hyperbolique des ondes de choc (Hibbert et Peregrine<sup>8</sup>). Ceci a conduit à l'adaptation des méthodes Volume Finis permettant la capture de discontinuités isolées et d'obtenir une bonne estimation intrinsèque de la dissipation d'énergie. Dans cette optique, Vincent et col.<sup>13</sup> ont développé un code Volumes Finis 1DH, *SURF\_SV*, basé sur un

schéma Mac-Cormack TVD. On peut citer également les travaux de Brocchini et col.<sup>3</sup>, basés sur la méthode WAF 2DH. Ces modèles donnent de bons résultats concernant les processus évoqués plus haut mais souffrent toutefois de quelques limitations.

En effet, l’obtention d’une description précise des interactions entre les ondes incidentes et les structures bathymétriques, naturelles ou non, présentes près des côtes est un problème délicat, surtout dans le cas de fortes variations de topographie. Les méthodes usuelles à pas fractionnaires, utilisées dans les précédents modèles, sont inadaptées. Il est donc important de considérer avec soin la manière dont le terme de topographie est intégré au modèle numérique. Nous nous sommes donc orientés vers le choix d’un schéma de type “équilibre”. Ces schémas ont la particularité de mieux intégrer les variations de topographie au modèle et permettent la préservation des états stationnaires.

D’autre part, la simulation d’écoulements dans la zone de swash est complexe puisqu’elle implique une gestion précise de l’apparition ou du recouvrement de zones sèches, sur des topographies irrégulières. La ligne d’eau, en perpétuel mouvement, génère une variation temporelle du domaine occupé par le fluide. Ce problème est souvent assimilé dans la littérature à un problème de condition aux limites, menant à des algorithmes complexes et difficilement généralisables au cas 2DH (Brocchini et col.<sup>4</sup>). Une alternative intéressante consiste alors à utiliser un solveur de Riemann local, combiné à une gestion des cellules de discrétisation “inondées” ou “découvertes” permettant de “capturer” la position de la ligne d’eau et conduisant à de bons résultats, aisément transposables au cas 2DH. Toutefois, l’extension d’une telle méthode conjointement à l’utilisation d’un schéma équilibre pour la topographie est un problème ouvert non trivial. En effet, une nouvelle difficulté apparaît, liée à la nécessaire préservation de la positivité de la hauteur d’eau à la ligne d’eau.

Dans cet article, nous exposons donc brièvement les réponses apportées à ces questions. Une méthode récente permettant d’obtenir un schéma équilibre qui préserve la positivité de la hauteur d’eau est utilisée conjointement à un solveur pour systèmes homogènes (fond plat) qui permet de bien gérer en pratique l’apparition de zones sèches tout en restant d’une extrême simplicité dans sa formulation. Tout ceci nous conduit à un nouveau modèle, nommé *SURF\_WB*. Des validations numériques impliquant des problèmes de ligne d’eau non-triviaux sont effectuées, suivies d’une application à l’étude de la propagation d’une onde solitaire en zone littorale.

## **2. Méthode numérique**

### **2.1 Equations de Saint-Venant**

La méthode numérique développée ici va être uniquement exposée dans le cas 1DH, l’extension au cas 2DH étant traitée par Marche et col.<sup>11</sup>. Les équations de Saint-Venant, en l’absence de termes de dissipation, peuvent être formulées de la manière suivante :

$$\mathbf{U}_{,t} + F(\mathbf{U})_{,x} = S(\mathbf{U}), \quad (1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, \quad F(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{g}{2}h^2 \end{pmatrix}, \quad S(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh d_x \end{pmatrix}$$

où  $(\ )_{,x}$  représente la dérivation selon  $x$ ,  $u$  la vitesse horizontale moyennée suivant la verticale,  $h$  la hauteur d'eau et  $d$  une description de la topographie.  $\mathbf{U}$  est alors une représentation vectorielle des variables conservatives,  $F(\mathbf{U})$  représentant le flux vectoriel et  $S(\mathbf{U})$  le terme décrivant les variations de topographie.

Une formulation semi-discrète de type Volume Finis du système (1) est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{U}_i(t) + \frac{1}{\Delta x}(\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^*) = \mathbf{S}_i \quad (2)$$

où le vecteur des variables conservatives discrètes est  $\mathbf{U}_i = {}^t(h_i, h_i u_i)$ ,  $\mathbf{F}_{i\pm\frac{1}{2}}^*$  représentant les flux numériques au travers des interfaces séparant la cellule considérée des cellules voisines et  $\mathbf{S}_i$  une discrétisation du terme source. Définir une méthode de type Volumes Finis revient alors à choisir une méthode de calcul des flux numériques et du terme source.

## 2.2 Le solveur VFRoe-ncv pour système homogène

Nous nous intéressons uniquement ici au système de Saint-Venant sur fond plat. Nous procédons à un changement de variable  $\mathbf{W}(\mathbf{U}) = (2c, u)$  où  $c = \sqrt{gh}$ . Suivant l'idée introduite par Gallouët et col.<sup>6</sup>, ce changement de variable permet de gérer de façon stable et transparente l'apparition de zones sèches. Le système devient, avec ces variables non-conservatives

$$\mathbf{W}_{,t} + C_x(\mathbf{W})\mathbf{W}_{,x} = 0, \quad (3)$$

où  $C_x$  est une matrice de convection symétrique. Considérant une linéarisation de cette matrice autour d'un état moyen  $\tilde{\mathbf{W}}$ , le flux au travers l'interface séparant la cellule  $i$  de la cellule  $i+1$  est alors donné par  $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* = F(\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^*)$  où  $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^*({}^x/t, \mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}) = \mathbf{U}(\mathbf{W}_{i+\frac{1}{2}}^*({}^x/t, \mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1}))$  et  $\mathbf{W}_{i+\frac{1}{2}}^*({}^x/t, \mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1})$  est calculé de la manière suivante :

– si  $\tilde{u} - \tilde{c} > 0$  ou  $\tilde{u} + \tilde{c} < 0$  la valeur à l'interface est définie par :

$$\mathbf{W}_{i+\frac{1}{2}}^* = \begin{cases} \mathbf{W}_i & \text{si } \tilde{u} - \tilde{c} > 0 \\ \mathbf{W}_{i+1} & \text{si } \tilde{u} + \tilde{c} < 0 \end{cases} \quad (4)$$

– si  $\tilde{u} - \tilde{c} < 0$  et  $\tilde{u} + \tilde{c} > 0$  alors on a :

$$c_{i+\frac{1}{2}}^* = \tilde{c} - \frac{1}{4}(u_{i+1} - u_i) \quad \text{et} \quad u_{i+\frac{1}{2}}^* = \tilde{u} - (c_{i+1} - c_i). \quad (5)$$

## 2.3 Prise en compte du terme source

Nous utilisons ici la méthode de reconstruction "hydrostatique", introduite par Audusse et col.<sup>1</sup>, permettant de prendre en compte les variations de

topographie et d'obtenir un schéma "équilibre" préservant la positivité de la hauteur d'eau. La première étape est d'effectuer une reconstruction de la hauteur d'eau prenant en compte les variations de topographie ainsi que l'équilibre obtenu pour le fluide en équilibre statique. On définit les quantités suivantes à chaque interface :

$$d_{i+\frac{1}{2}} = \max(d_i, d_{i+1}) \quad (6)$$

et

$$h_{i+\frac{1}{2}-} = \max(0, h_i + d_i - d_{i+\frac{1}{2}}), \quad h_{i+\frac{1}{2}+} = \max(0, h_{i+1} + d_{i+1} - d_{i+\frac{1}{2}}) \quad (7)$$

et on en déduit les variables reconstruites de chaque coté de l'interface considérée :

$$\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}-} = \begin{pmatrix} h_{i+\frac{1}{2}-} \\ h_{i+\frac{1}{2}-} u_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}+} = \begin{pmatrix} h_{i+\frac{1}{2}+} \\ h_{i+\frac{1}{2}+} u_{i+1} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Ces quantités reconstruites sont utilisées à la place de  $\mathbf{U}_i$  et  $\mathbf{U}_{i+1}$  pour calculer le flux à l'interface  $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^*$  en utilisant le solveur VFRoe-ncv introduit précédemment :

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* = F(\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^*(0, \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}-}, \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}+})). \quad (9)$$

Guidé par la préservation de l'équilibre stationnaire au repos, une discrétisation du terme source est également effectuée, utilisant les quantités reconstruites et distribuant les contributions respectives de chaque cellule à l'interface :

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}-} + \mathbf{S}_{i-\frac{1}{2}+} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} h_{i+\frac{1}{2}-}^2 - \frac{g}{2} h_i^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} h_i^2 - \frac{g}{2} h_{i-\frac{1}{2}+}^2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

La formulation semi-discrète devient alors :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{U}_i(t) + \frac{1}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^- - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^+) = 0 \quad (11)$$

où les flux numériques au travers de l'interface sont définis par :

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^- = \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* + \mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}-} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^+ = \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* + \mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}+} \quad (12)$$

L'extension vers un schéma d'ordre 2 est détaillée dans Marche et col.<sup>11</sup>.

### 3. Validations numériques

Nous procédons ici à des validations s'appuyant sur des solutions analytiques impliquant des mouvements de la ligne d'eau sur des topographies variables. L'objectif est de mettre en évidence la qualité des résultats fournis par ce modèle et de montrer les améliorations obtenues vis à vis de méthodes moins évoluées. Ces points sont abordés de façon plus complète par Marche et col.<sup>11</sup>. En particulier, des courbes d'erreur  $L^2$ , permettant de mettre en

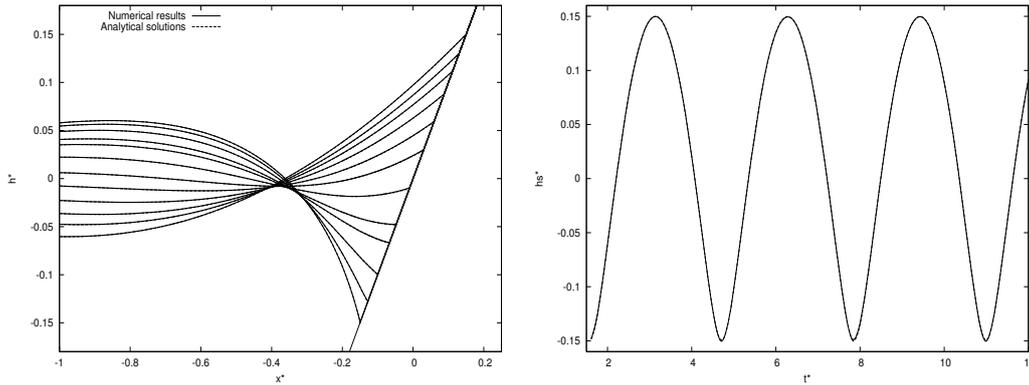


FIG. 1 – Solution périodique de Carrier et Greenspan. Comparaison entre résultats numériques (traits pleins) et analytiques (pointillés). A gauche : profils adimensionnés de la surface libre  $h^*/e$  à plusieurs instants durant une demi-période. A droite : évolution de la ligne d'eau en fonction du temps.

évidence de façon quantitative la précision de la méthode, seront exhibées lors de la communication.

### 3.1 Cas uni-dimensionnels

Nous proposons une comparaison entre des résultats numériques et les solutions analytiques obtenues par Carrier et Greenspan<sup>5</sup>. La première solution (Fig.1) décrit l'évolution périodique de la ligne d'eau correspondant aux oscillations d'une onde monochromatique stationnaire sur une plage de pente constante. Cette solution illustre l'aptitude du modèle à calculer les phénomènes oscillants de recouvrement/découvrement dans la zone de swash. La seconde solution décrit l'évolution de la surface libre depuis une dépression initiale (courbe la plus basse de la Fig.2), vers le niveau d'eau moyen au repos  $e$ . L'attention est portée sur l'évolution de la ligne d'eau qui va tout d'abord atteindre une zone située au delà du niveau moyen ("run-up") avant de converger asymptotiquement vers le niveau moyen, une fois la zone inondée maximale atteinte. La solution analytique obtenue à  $t = 0$  est utilisée comme condition initiale et la condition à la limite à gauche est imposée par l'évolution de la surface libre issue de la solution analytique, générant le mouvement. Un pas  $\Delta x = 0.01$  et une condition  $CFL = 0.7$  ont été utilisés. La Fig. 1 montre que les oscillations de la ligne d'eau sont calculées de manière très précise, même après plusieurs périodes. Il est à noter que d'autres schémas de type "équilibre", tel le schéma Well-Balanced de Greenberg et Leroux<sup>7</sup> permettant de simuler avec succès des cas très raides dans le domaine de l'hydraulique, conduisent à des oscillations non-physiques très fortes à la ligne d'eau durant l'évolution. Nous pouvons également observer sur la Fig. 2 un très bon accord entre résultats numériques et solution analytique au cour de l'évolution. Dans les deux cas, une étude de l'erreur confirme la très bonne précision de ces résultats, comparables à ceux obtenus à l'aide de méthodes de transformation de coordonnées (Brocchini et col.<sup>4</sup>). Il est remarquable de constater, pour la deuxième solution, que la convergence de la surface libre vers le niveau moyen

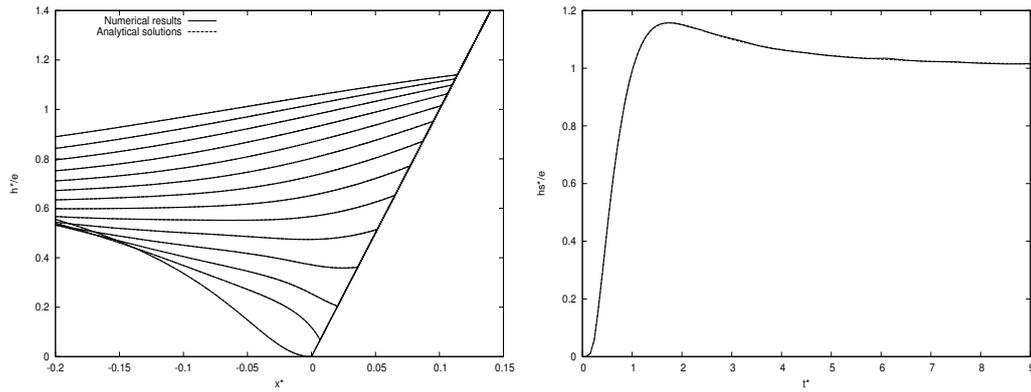


FIG. 2 – Solution transitoire de Carrier et Greenspan. Comparaison entre résultats numériques (traits pleins) et analytiques (pointillés). A gauche : profils adimensionnés de la surface libre  $h^*/e$  à plusieurs instants durant l'évolution. A droite : évolution de la ligne d'eau en fonction du temps.

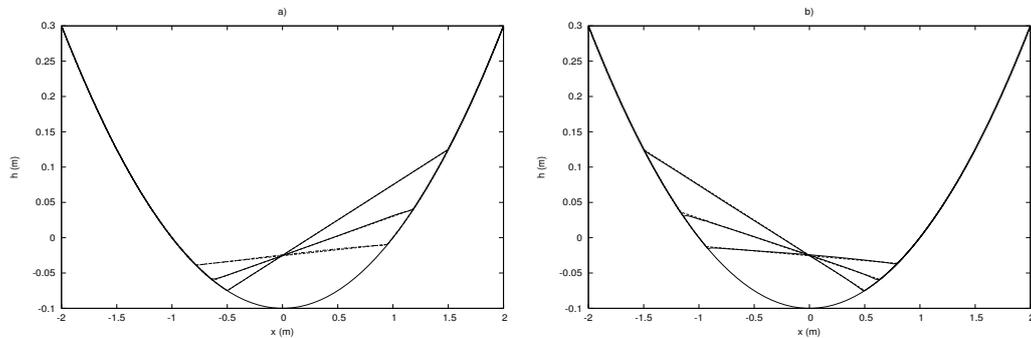


FIG. 3 – Solution de Thacker. Comparaison entre résultats numériques (traits pleins) et analytiques (pointillés) pour la surface libre durant une demi-période.

est calculée de manière très précise grâce au schéma “équilibre”, les méthodes classiques à pas fractionnaires produisant ici de très mauvais résultats. A notre connaissance, cette étape de convergence n'est pas exhibée dans la littérature, les méthodes numériques proposées étant inadaptées.

### 3.2 Cas bi-dimensionnel

Nous proposons ici une comparaison avec la solution analytique introduite par Thacker<sup>12</sup>, décrivant une évolution périodique dans un bassin de forme paraboloidique. Ce test est l'un des plus difficiles à appréhender d'un point de vue numérique, puisque la surface libre reste plane au cours de l'évolution, impliquant des oscillations périodiques non-symétriques de la ligne d'eau. On observe sur la Fig.3 différents profils de la surface libre au cours d'une demi période, selon une coupe transversale centrée. Résultats numériques et solution analytique sont ici aussi en très bon accord, en particulier aux voisinages de la ligne d'eau durant les phases de “run-up” et “run-down”, même après plusieurs périodes. Ces résultats sont qualitativement comparables à ceux trouvés dans la littérature, reposant sur des méthodes nettement plus complexes, telle

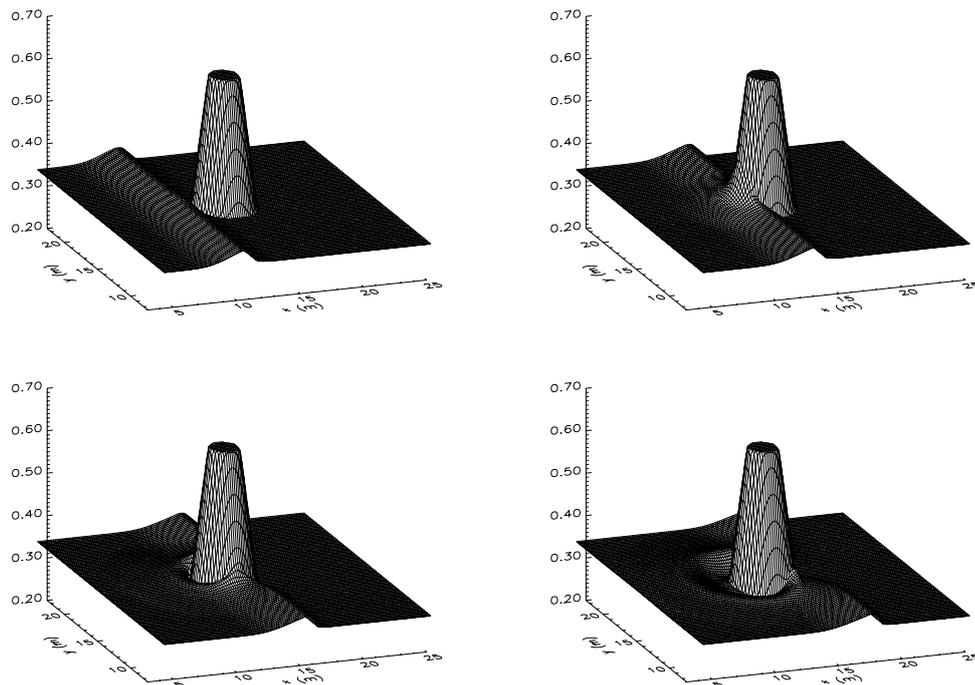


FIG. 4 – Propagation d'une onde solitaire. Evolution de la surface libre à : a)  $t=7$  s, b)  $t=9$  s, c)  $t=10.5$  s, d)  $t=11.5$  s

la méthode d'extrapolation et filtrage par Lynett et col.<sup>10</sup> ou encore la méthode de raffinement de maillage introduite par Hubbard et Dodd<sup>9</sup>.

#### 4. Applications

Nous terminons cet exposé en illustrant brièvement les possibilités de ce modèle en l'appliquant à l'étude du run-up d'une onde solitaire de type tsunami sur une île conique, suivant l'expérience de Briggs et col.<sup>2</sup>. Le phénomène de levée n'est bien entendu pas modélisé ici et nous nous focalisons sur l'étude des zones inondées autour de l'île. Nous observons sur la Fig.4 les résultats obtenus pour l'évolution de la surface libre, incluant le recouvrement d'importantes zones tout autour de l'île et plus particulièrement à l'arrière.

Outre une grande efficacité à appréhender les mouvements de la ligne d'eau, notre modèle permet de calculer la convergence vers l'état stationnaire au repos, une fois toutes les ondes réfractées et réfléchies évacuées. Ceci permet en particulier d'obtenir des temps caractéristiques concernant les phénomènes impliqués en très bon accord avec l'expérience et d'améliorer significativement les résultats numériques trouvés dans la littérature.

#### 5. Conclusions et perspectives

Nous avons introduit un modèle numérique très simple s'appuyant sur

des méthodes récentes développées pour répondre aux limitations des méthodes classiques. Nous avons montré sa capacité à décrire avec précision les oscillations de la ligne d'eau sur une topographie variable 2D et illustré son potentiel sur un cas concret de propagation d'une onde solitaire. Notre objectif est maintenant d'inclure des effets dispersifs à notre modèle.

**Remerciements** : Ces travaux ont été soutenus par le programme national de l'INSU PATOM (Programme ATmosphère Océan à Multi-échelles).

### **Bibliographie**

- 1** Audusse E, Bouchut F, Bristeau MO, Klein R, Perthame B., (2004). A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM J.Sci.Comp.*, **25**(6), 2050-2065.
- 2** Briggs MJ, Synolakis CE, Harkins GS., (1994). Tsunami runup on a conical island. International symposium : waves - physical and numerical modelling, University of British Columbia, Vancouver, Canada.
- 3** Brocchini M, Bernetti R, Mancinelli A, Albertini G., (2001). An efficient solver for nearshore flows based on the WAF method. *Coastal Engineering*, **43**, 105-129.
- 4** Brocchini M, Svendsen IA, Prasad RS, Belloti G., (2002). A comparison of two different types of shoreline boundary conditions. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **191**, 4475-4496.
- 5** Carrier GF, Greenspan HP., (1958). Water waves of finite amplitude on a sloping beach. *J. Fluid Mech.*, **4**, 97-109.
- 6** Gallouet T, Herard JM, Seguin N., (2003). Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topography. *Computers and Fluids*, **32**, 479-513.
- 7** Greenberg JM, Leroux AY., (1996). A well balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations, *SIAM J.Numer.Anal.*, **33**(1), 1-16.
- 8** Hibberd S, Peregrine DH., (1979). Surf and run-up on a beach : a uniform bore. *J. Fluid. Mech.*, **95**(2), 323-345.
- 9** Hubbard ME, Dodd N., (2002). A 2D numerical model of wave run-up and overtopping, *Coastal Engineering*, **47**, 1-26.
- 10** Lynett PJ, Wu TR, Liu PL-F., (2002). Modeling wave run-up with depth-integrated equations, *Coastal Engineering*, **46**, 89-107.
- 11** Marche F, Bonneton P, Fabrie P, Seguin N., (2006). Evaluation of well-balanced schemes for wetting and drying processes. To appear in *Int. J. Num. Meth. Fluids*.
- 12** Thacker WC., (1981). Some exact solutions to the nonlinear shallow-water wave equations. *J. Fluid Mech.*, **107**, 499-508.
- 13** Vincent, S., Bonneton, P. and Caltagirone, J-P., (2001). Numerical modeling of bore propagation and run-up on sloping beaches using a MacCormack TVD scheme. *J. of Hydr. Research*, **39**, 41-49.