Une équation parabolique de la houle en zone côtière avec une correction non linéaire

M. Ait Laamel[a], S. Mordane[b], M. Chagdali[c], A. Hourimeche[d]

LCSM, LES Faculté des Sciences Ben M'Sik, B.P 7955 Casablanca, Maroc
a.Doctorant,b. Professeur Habilité ,c-d .Professeur
mordane.soumia@caramail.com & m.chagdali@univh2m.ac.ma

Résumé:

On s'intéresse à l'étude de la formulation parabolique des équations de propagation de la houle en terme de capacité angulaire par rapport à la direction de propagation privilégiée. Cette formulation parabolique est obtenue par éclatement de l'équation de Berkhoff en deux opérateurs paraboliques que l'on approche par des approximations rationnelles quadratiques. Ce modèle a apporté des améliorations dans son application à des configurations géométrique académiques. D'abord, on va discuter son efficacité par rapport aux modèles paraboliques introduisant la non linéarité dans la relation de dispersion. Ensuite, on fera une application pour la détermination de la houle dans la région de Casablanca-Mohammedia (Maroc). Ce calcul se fera en corrélation avec une analyse sédimentologique.

Abstract:

In this work, we are interested upon the parabolic formulation of propagation equations of gravity waves in surface in terms of angular capability with respect to the privileged propagation direction. This parabolic formulation is obtained by splitting the Berkhoff equation operator into two parabolic operators. This model gave improvements in application to the academic geometric configurations. First, we'lle discuss the efficiency of this parabolic model in relation to those introducing nonlinearity in the dispersion relationship. Then, an application to the region of Casablanca-Mohammedia (Morocco) will be made in order to determine the waves in this region. This study will be made in interrelationship with an analysis sedimentary.

Mots-clés: Houle à la côte, méthodes paraboliques, capacité angulaire, approximations rationnelles quadratiques, diffraction-réfraction, sédimentologie

Keywords: Waves, parabolic method, angular capability, quadratic rational, diffraction-refraction, sedimentary.

1.Introduction

Depuis son introduction pour l'étude des ondes de gravité en surface, les équations paraboliques se sont avérées efficaces pour traiter rapidement et avec précision les problèmes de propagation de la houle en zone côtière. Ces équations se basent sur la transformation du problème elliptique de l'équation de Berkhoff [1], qui prend en compte les effets combinés de la réfraction et de la diffraction, en un problème parabolique que l'on peut résoudre comme un problème à valeur au départ. La résolution numérique se fait à résolutions successives dans la direction de propagation privilégiée.

La chronologie des travaux qui s'intéressent à l'amélioration de la capacité angulaire des équations paraboliques montre qu'on est passé d'une capacité angulaire de 30°, avec l'équation de Radder[2] à une capacité de 70° dans les plus récentes modélisations proposées [3,4,5].

Dalrymple et al.[6] ont proposés des améliorations de la capacité angulaire en introduisant une relation de dispersion non linéaire de la forme:

$$\omega^2 = ghk\left(1+\frac{A}{h}\frac{9A/h}{8k^2h^2}\right)$$

où h est la profondeur, A l'amplitude locale de la houle, k le nombre d'onde et ω la fréquence angulaire.

Récemment, Mordane et al [3] a développé, dans le cadre des hypothèses associées à l'équation de Berkhoff, un modèle parabolique de grande capacité angulaire [3] et la validité de cette formulation parabolique quadratique a été analysée sur plusieurs exemples références proposées dans la littérature[3,4].

Dans le présent travail, on va discuter l'apport des deux dernières approches. Il s'agit de comparer l'introduction de la non linéarité de la relation de dispersion et la prise en compte des dérivées d'ordre supérieur.

Une application à la détermination de la houle dans la région de Casablanca-Mohammedia (Maroc) sera faite afin de déterminer les zones de fortes agitations et les zones de faible agitation de la houle en corrélation avec une analyse sédimentologique dans le même site.

2.Formulation théorique

Dans le cadre de la théorie linéaire harmonique, la propagation de la houle en surface sur un fond avec une variation douce de la pente est régie par l'équation de Berkhoff[1]:

$$\vec{\nabla}\cdot(CCg\,\vec{\nabla}\phi) + \frac{\omega^2 Cg}{C}\phi = 0 \qquad (1)$$

ϕ (x, y) est le potentiel des vitesses bidimensionnel et complexe, $\nabla \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ est l'opérateur gradient horizontal et ω est la fréquence angulaire. C et Cg représentent respectivement la célérité et la vitesse de groupe.

Il est plus commode de traiter l'équation (1) sous une forme réduite obtenue avec le changement de variable suivant [2]:

$$\varphi = \sqrt{CCg}\,\phi. \qquad (2)$$

En effet, si on remplace la relation (2) dans l'équation (1) on obtient une équation de type Helmoltz:

$$\nabla^2\varphi + k^2\varphi = 0, \qquad (3)$$

où

$$k^2 = k_o^2 - \frac{\nabla^2(\mathrm{CCg})^{\frac{1}{2}}}{(\mathrm{CCg})^{\frac{1}{2}}} \qquad (4)$$

k_0 est le nombre d'onde, il vérifie localement la relation de dispersion: $\omega^2 = gk_0\,th(k_0h)$, où h étant la profondeur locale, g la gravité. La célérité C et la vitesse de groupe Cg sont données respectivement par:

$$C = \frac{\omega}{k_o} \quad ; \quad Cg = \frac{\partial\omega}{\partial k_o}$$

En admettant la commutativité des opérateurs différentiels $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\sqrt{1+X}$ l'équation (3) peut être écrite, sous la forme factorielle suivante:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+ik\sqrt{1+X}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-ik\sqrt{1+X}\right)\varphi=0 \qquad (5)$$

avec: $X=\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ un opérateur lié à la direction orthogonale de la propagation.

Si on suppose que la houle se propage sans réflexion notable, l'équation (5) se ramène à la forme suivante: $\left(\frac{\partial}{\partial x}-ik\sqrt{1+X}\right)\varphi=0$ (6)

On se retrouve avec une équation contenant un opérateur racine carrée du type $\sqrt{1+X}$, où X est un opérateur pseudo-différentiel du second ordre. L'approximation de $\sqrt{1+X}$ peut être faite par des fonctions rationnelles. Dans ce travail, on a choisi un approximant rationnel quadratiques:

$$\sqrt{1+X}\cong\frac{p_1+p_2X+p_3X^2}{q_1+q_2X+q_3X^2}+o(X^5) \qquad (7)$$

on aboutit à l'équation

$$(q_1+q_2X+q_3X^2)\frac{\partial\phi}{\partial x}=ik[p_1+p_2X+p_3X^2]\phi. \qquad (8)$$

En utilisant l'expression de X, l'Equation (8) devient

$$(\alpha_1+\alpha_2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\alpha_3\frac{\partial^3}{\partial y^3}+\alpha_4\frac{\partial^4}{\partial y^4})\frac{\partial\phi}{\partial x}=ik(\beta_1+\beta_2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\beta_3\frac{\partial^3}{\partial y^3}+\beta_4\frac{\partial^4}{\partial y^4})\phi, \qquad (9)$$

où

$$\alpha_1=q_1;\quad \alpha_2=\frac{q_2}{k^2}+\frac{2q_3}{k^5}(\frac{3}{k}\left(\frac{\partial k}{\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 k}{\partial y^2});\quad \alpha_3=-\frac{4q_3}{k^5}\frac{\partial k}{\partial y};\ \alpha_4=\frac{q_3}{k^4};$$

$$\beta_1=p_1;\quad \beta_2=\frac{p_2}{k^2}+\frac{2p_3}{k^5}(\frac{3}{k}\left(\frac{\partial k}{\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 k}{\partial y^2});\quad \beta_3=-\frac{4p_3}{k^5}\frac{\partial k}{\partial y};\ \beta_4=\frac{p_3}{k^4}.$$

L'équation (9) est une équation parabolique différentielle aux dérivées partielles du cinquième ordre. Sa détermination nécessite la connaissance de l'ensemble des coefficient $\{p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3\}$. On note que suivant la valeur de ces coefficients, on retrouve toutes les équations mentionnées précédemment sous forme de cas particulier:

- L'ensemble Pr=$\{p_1=1,p_2=1/2,p_3=0,q_1=1,q_2=0, q_3=0\}$ conduit à l'équation de Radder[2].
- L'ensemble Pk=$\{p_1=1,p_2=3/4,p_3=0,q_1=1,q_2=1/4,q_3=0\}$ conduit à l'équation de Kirby[5].
- L'ensemble Pkni =$\{p_1=1.628909,\ p_2=2.428289,\ p_3=0.8308198,\ q_1=1.628934,\ q_2=1.615038,\ q_3=0.235499\}$[3] est celle qui va être utilisé dans ce travail.

<u>Capacité angulaire des équations paraboliques</u>

Pour discuter la capacité angulaire des équations paraboliques, on considère le cas d'une onde plane se propageant sur un fond plat (k = c^{te}). Les solutions de l'équation d'onde sont dans ce cas

$$\exp[ik(k_x x\pm k_y y)] \qquad (10)$$

où k_x, cosinus de l'angle de propagation θ mesuré par rapport à la direction de propagation privilégiée, et k_y, son sinus, vérifient la relation de dispersion exacte

$$k_x^2+k_y^2=1,\ \text{ou}\ k_x=\pm\sqrt{1-k_y^2} \qquad (11)$$

Les solutions de l'Equation (11) sont utilisées pour dériver les relations de dispersion approchées pour les équations paraboliques qui sont

$$k_x=\pm(1-k_y^2/2) \qquad (12)$$

pour l'équation de Radder[2],

$$k_x=\pm(1-\frac{3}{4}k_y^2)/(1-\frac{1}{4}k_y^2) \quad (13)$$

pour les équations de Kirby[5],

$$k_x=\pm(1-\frac{5}{4}k_y^2+\frac{5}{16}k_y^4)/(1-\frac{3}{4}k_y^2+\frac{1}{16}k_y^4) \quad (14)$$

pour les équations avec des coefficients noté *Pa*.[3] .

$$k_x=\pm(p_1-p_2k_y^2+p_3k_y^4)/(q_1-q_2k_y^2+q_3k_y^4) \quad (15)$$

pour l'équation parabolique (9) avec l'ensemble des coefficients noté Pkni..

Les angles de propagation maximaux peuvent être déterminés de manière approximative par le calcul de la différence entre la solution exacte (11) et les solution approchées (12)-(13)-(14)-(15) (voir figure 1).

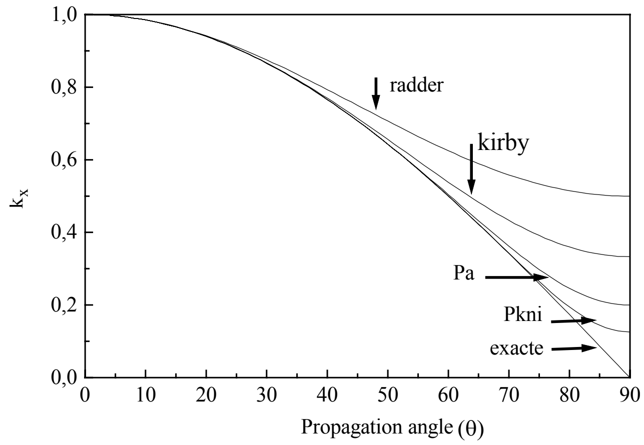

Figure 1: *La différence entre la solution exacte et les solutions paraboliques*

On remarque que l'équation parabolique (9) avec les coefficients Pkni est meilleure sur l'intervalle [0,π/2].

3.Résolution numérique

Nous choisissons pour la résolution numérique les pas d'espace Δx et Δy constants pour les directions x et y. On pose par commodité d'écriture $u(x_n,y_l)=u_l^n$.

L'équation discrétisée peut s'écrire sous la forme générale $A1^{(n)}u^{n+1}=A0^{(n)}u^n$,où *A1* et *A0* sont des matrices qui dépendent de la discrétisation géométriques du domaine de calcul et u l'inconnue du problème. Cette formulation numérique présente des avantages en terme de temps de calcul qu'on résume de la manière suivante:

- La procédure de calcul ne nécessite pas le maillage de tout le domaine de calcul, il n'y a que la ligne orthogonale à la direction de propagation privilégié qui est discrétisée.
- Au cours de la résolution, on n'utilise que les conditions de départ et les conditions aux limites sur les frontières latérales. La résolution se fait à l'avancement dans la direction de propagation privilégié.
- La densité de maillage dépend de la période et de la bathymétrie.

4.Résultats

Pour la configuration étudiée, on a défini respectivement l'amplitude A et la phase F à partir du potentiel des vitesses φ de la manière suivante [2]:

$$\varphi\,(x,y) = A(x,y)\,e^{iF(x,y)}$$

Cette écriture du potentiel complexe sur la surface libre en terme de produit d'amplitude et de phase permet à la fois de dissocier et d'interpréter les termes liés à la diffraction et à la réfraction.

L'exemple étudié est celui d'un dispositif, constitué d'une bosse de forme elliptique reposant sur un fond plan incliné de 1:5 par rapport à l'horizontale. Le fond incliné prend naissance dans une région de profondeur constante (h = 0.45m) au voisinage d'un batteur de houle, puis l'ensemble de la pente subit une rotation de 20° par rapport à la normale au plan contenant le batteur. La figure 2 illustre le domaine de calcul et la topographie. On définit les coordonnées inclinées (x',y') qui sont obtenues à partir des coordonnées cartésiennes (x,y) par les relations suivantes:

$$x' = (x-10.5)\cos(20°)-(y-10)\sin(20°)$$
$$y' = (x-10.5)\sin(20°)+(y-10)\cos(20°)$$

L'origine de l'obstacle correspond à (x',y')=(0,0). En absence de l'obstacle, la profondeur est donnée partout par:

$$h = \begin{cases} 0.45\text{m},\ x' < -5.84\ \text{m} \\ 0.45 - 0.02(5.84 + x')\text{m},\ x' \geq -5.84\ \text{m} \end{cases}$$

La frontière de l'obstacle est donnée par:

$$\left(\frac{x'}{3}\right)^2 + \left(\frac{x'}{3}\right)^2 = 1$$

et la bathymétrie h(x,y) dans la région de l'obstacle est donnée par:

$$h = h - 0.5\left[1 - \left(\frac{x'}{3.75}\right)^2 + \left(\frac{y'}{5}\right)^2\right]^{1/2} + 0.3$$

La propagation d'une onde de surface en présence de ce dispositif a été étudiée expérimentalement et numériquement par plusieurs auteurs[5,6].

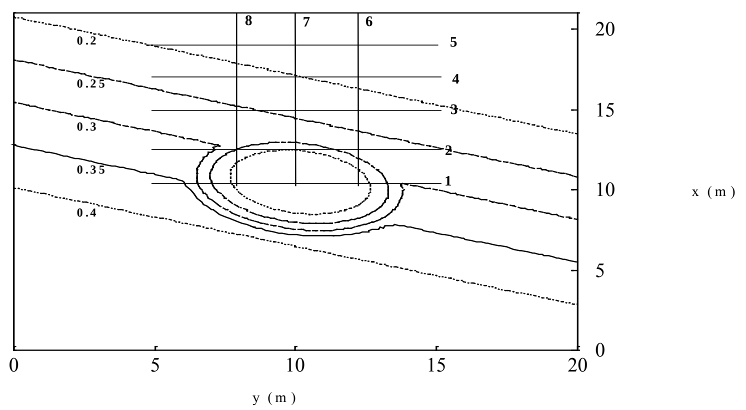

***Figure 2** : Domaine de calcul, les traits indiquent les sections de mesures.*

Sur ce dispositif, nous comparons les résultas de notre modèle quadratique (Pkni) où les dérivations sont d'ordre supérieur, les résultats du modèle linéaire de Kirby[6], du modèle non linéaire de Dalrymple et al.[6] utilisant une relation de dispersion non linéaire et des mesures expérimentale de Berkhoff et al.[5] le long des sections 1-8 indiquées sur la figure 2.

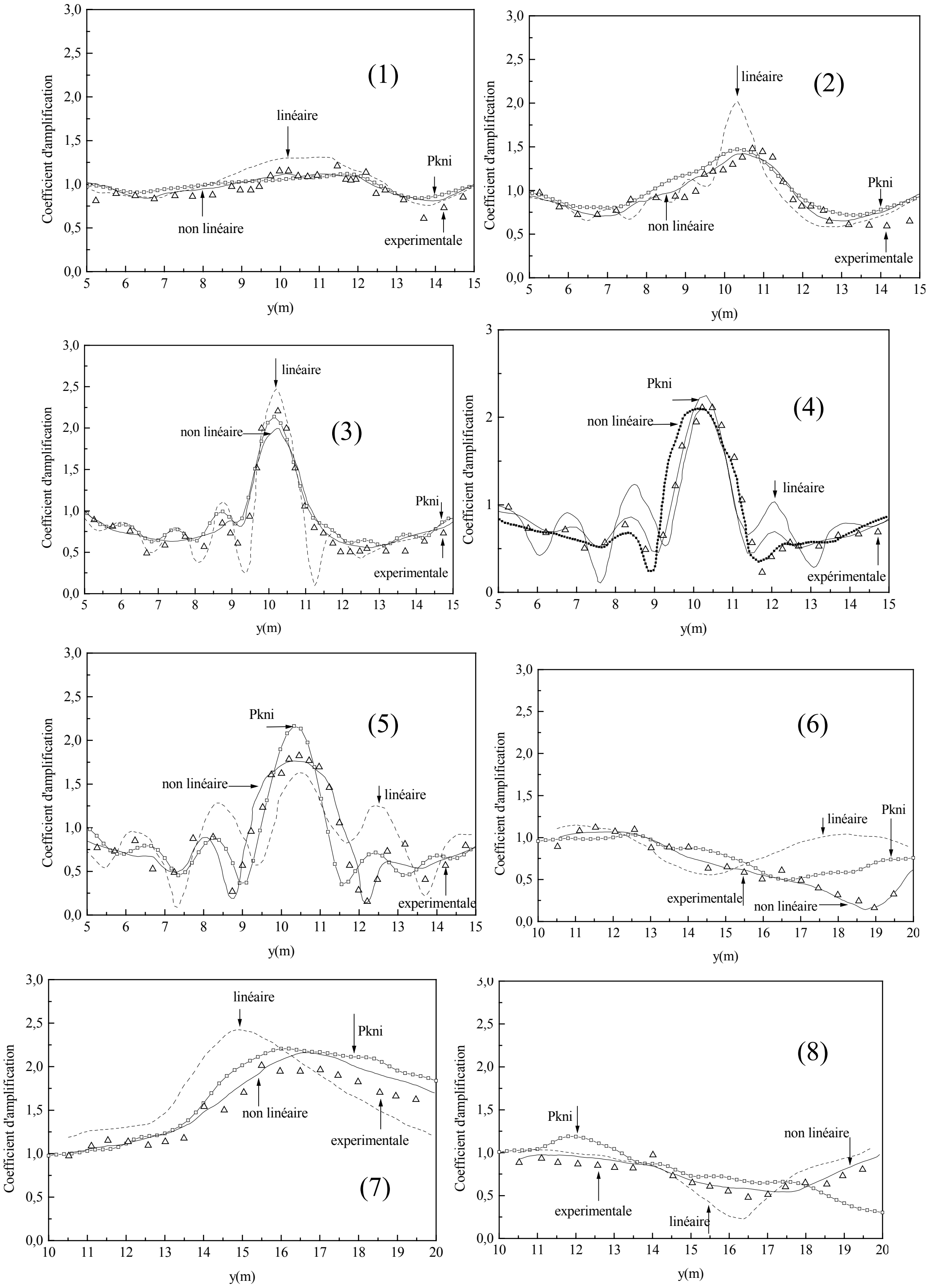

***Figure 3:** Comparaison des résultats le long des sections 1-8 respectivement (voir figure 2).*

Nous constatons que notre modèle parabolique apporte les mêmes améliorations que les modèles où la relation de dispersion est non linéaire.

Application du modèle au littoral de Casablanca-Mohammedia (Maroc):

En se basant sur les données de la houle hivernale (direction NW, période 14 s et amplitude 4 m) au large de Casablanca-Mohammedia, l'application de notre modèle parabolique nous a permis de définir les zones de convergence de la houle et les zones protégées le long du littoral constituant le domaine d'étude.

Parallèlement, l'analyse granulométrique des sables du littoral Casablanca- Mohammedia, pendant la période hivernale, a permis de constater que les sédiments fins sont localisés au niveau des zones de faible agitations et les sédiments grossiers sont situés au niveau des zones à forte agitations (figure 4-a).

Il existe une corrélation directe entre l'analyse granulométrique et le calcul numérique de la houle. En effet, les zones de convergence de la houle correspondent à des zones de sables grossiers et les zones de faible agitations à des zones de sables fins (figure 4-b).

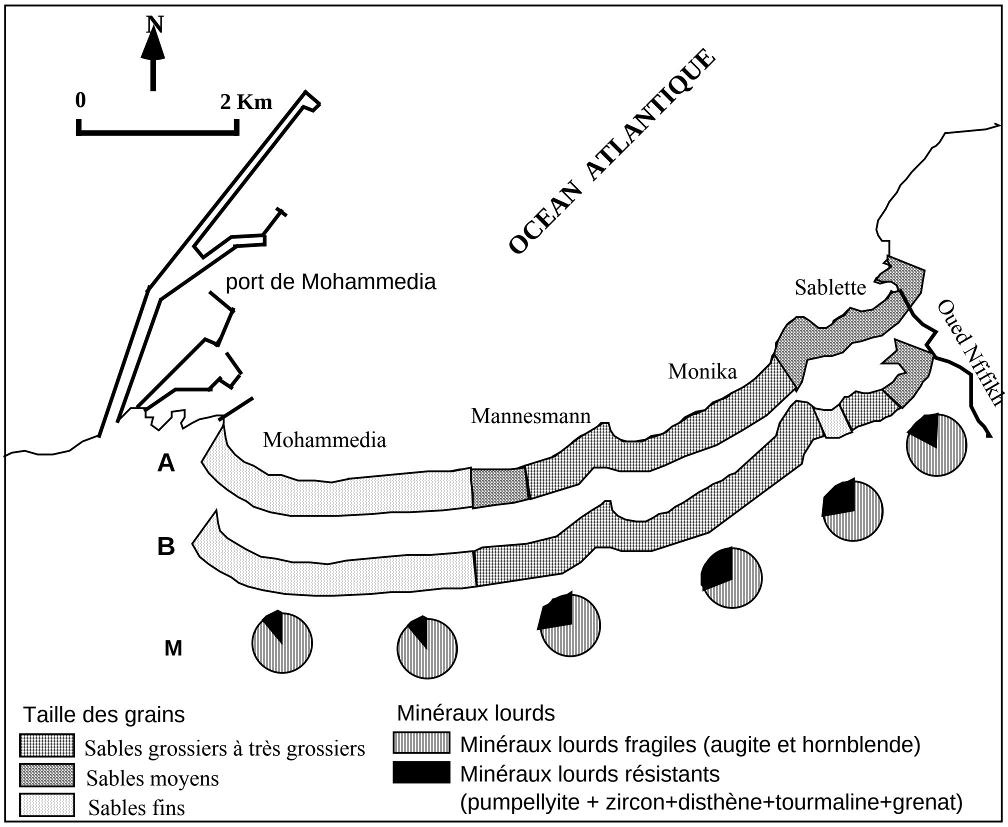

Figure4-a: *Répartition granulométrique et minéralogique des sables du littoral Mohammedia*

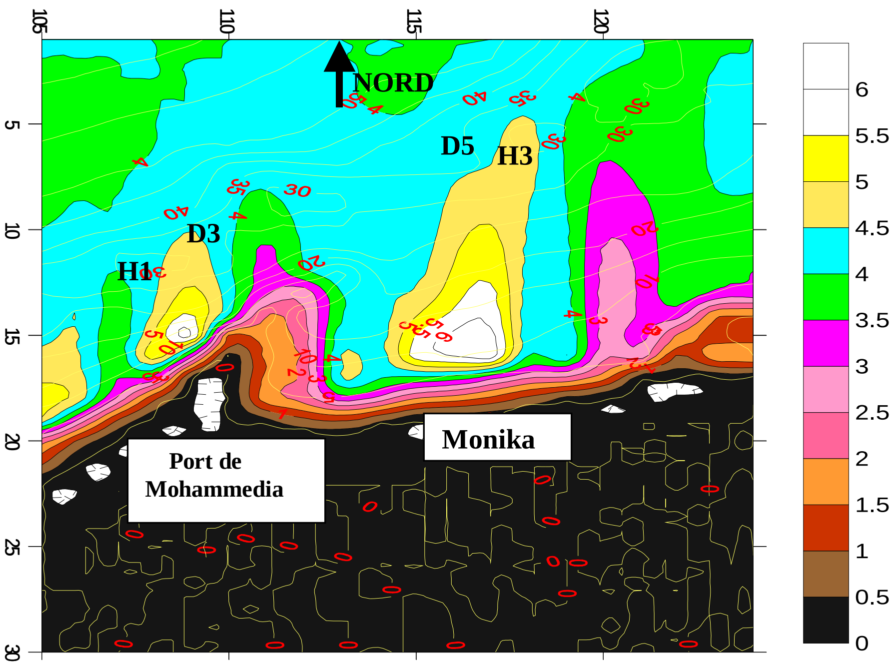

***Figure 4-b** : Réfraction- diffraction de la houle hivernale sur le littoral Mohammedia.*

5.Conclusion:

Le modèle de l'équation parabolique a permis d'améliorer la capacité angulaire de la direction privilégiée. La comparaison avec les résultats de la littérature ont permis de valider cette approche dans le cadre de la théorie linéaire. Son efficacité par rapport aux modèles introduisant la non linéarité dans la relation de dispersion a été constaté et semble être du même ordre.

Les résultats des études sédimentologiques du littoral Casablanca- Mohammedia sont conformes aux résultats obtenus par le modèle parabolique et confirment la fiabilité de ce code de calcul sur l'ensemble du littoral Mohammedia.

6.Références:

1.Berkhof J. C. W., (1973). Computation of combined refraction and diffraction. Proceedings of 13th Coastal Engineering Conference, Vancouver. Am.Soc.Civil.Eng. 1 , 471-490.

2.Radder A. C., (1979). On the parabolic equation method for water-wave propagating method. J. Fluid Mech., 95, 159-176.

3.Mordane S., Mangoub G., Maroihi K. & Chagdali M.,(2004). A parabolic equation based on a rational quadratic approximation for surface gravity wave propagation. Coastal Engineering.50 (2004) 85-95.

4.Mordane S., Maroihi K., Orbi A. & Chagdali M., (2001). Une formulation parabolique pour la propagation en profondeur finie des ondes de gravité en surface. Oceanologicaacta, Vol. 24-No.3.

5.Kirby, J. T., (1986). Higher order Approximations in Parabolic Equation Method for Water waves. Journal of Geophysical Research, 91: 933-952.

6.Darymple, R. A., Suh, K. D., Kirby, J. T. & Chae, J. W., (1989). Models for very wide-angle water waves and wave diffraction. Part 2. Irregular bathymetry. J. Fluid Mech., **201:** 299-322.