Propagation d'une onde de gravité en présence d'obstacles fixés sur le fond d'un canal: étude théorique, numérique et expérimentale

S. Mordane*, C. Chahine**, S. Naasse**, M. Chagdali***

** Maitre assistante, **Professeur assistant, ***Professeur*

Laboratoire de Calcul Scientifique en Mécanique (LCSM)

Faculté des Sciences Ben M'Sik

Av. Cdt D El Harti, BP 6621, Casablanca, Maroc

Résumé:

Nous nous intéressons à l'étude de la propagation de la houle linéaire en présence de deux obstacles espacés et fixés sur le fond d'un canal. Trois outils sont mis en œuvre: le premier théorique, le second numérique, et le troisième expérimental. Le modèle théorique est un modèle d'onde plane corrigé par l'introduction de la dimension apparente des obstacles. Le modèle numérique est basé sur la méthode des éléments frontières qui nous a permis d'accéder numériquement au calcul du coefficient de réflexion. Les résultats expérimentaux sont obtenus dans un canal à houle du Laboratoire. Nous validerons d'une part les différentes approches par rapport aux résultats expérimentaux, et d'autre part nous analyserons la zone des longueurs d'ondes pour laquelle la houle ignore la présence des obstacles, et l'effet de leur disposition géométrique sur le coefficient de réflexion.

Abstract:

We study the propagation of linear surface gravity waves in a channel in the presence of two bottom fixed obstacles. Three tools are used: the first is theoretical, the second is numerical, and the third is experimental. The theoretical model is a model of plane wave corrected by the introduction of the apparent dimension of obstacles. The numerical model is based on boundary elements method that permitted us the access to the reflection coefficient numerically. The experimental results are obtained in a channel of the Laboratory. On the one hand we will validate the different approaches in relation to the experimental results, and on the other hand we will analyze the wave length range for which surface gravity waves are unaffected by the obstacles, and the effect of their geometrical lay-out on the reflection coefficient.

I - Introduction:

Le problème de la propagation d'une onde de gravité en présence d'obstacles rectangulaires immergés est très étudié pour son importance en génie côtier et l'efficacité d'atténuation de la houle par ce type d'obstacles est largement détaillée dans la littérature [1,2,3]. Ce problème constitue aussi un champ d'investigation des méthodes théoriques et numériques pour la compréhension des mécanismes d'atténuation et de dissipation de la houle. Dans le cas d'un obstacle rectangulaire ou d'un fond constitué d'une succession de domaines de profondeurs constantes, les différentes méthodes de calcul sont toutes basées sur un écoulement potentiel et seules les méthodes de résolution diffèrent.

ISBN 2-9505787-5-6

Dans ce travail, trois démarches ont été entreprises pour le calcul du coefficient de réflexion en fonction de l'immersion relative **kh** (**k** étant le nombre d'onde et **h** l'immersion ou hauteur d'eau au repos sur les obstacles): la première est analytique, la seconde numérique et la troisième expérimentale.

Dans la première démarche, la résolution analytique a été effectuée dans le cadre du modèle d'onde plane. Malgré la simplicité de ce modèle, les résultats obtenus ont permis de localiser, en relation avec l'immersion relative, une zone d'ombre où la houle ignore complètement la présence des obstacles. Par rapport aux résultats de la littérature, que ce soit pour une seule marche [4], ou pour deux marches, il y a une surestimation de cette zone d'ombre. Ceci peut être expliqué par l'existence des modes non propagatifs [1-5] ou bien par l'existence d'une zone tourbillonnaire. Nous proposons une amélioration du modèle d'onde plane, basée sur la notion de la dimension apparente des obstacles. Cette idée consiste à faire des calculs analytiques avec un obstacle virtuel dont les dimensions sont légèrement plus grandes que ses dimensions réelles. Ce qui permet d'éviter des calculs avec des modèles théoriques complexes.

Dans la seconde démarche, nous présentons une procédure de résolution numérique par la méthode des éléments frontières (B.E.M: Boundary Element Method). Cette méthode permet de construire des relations intermédiaires entre l'inconnue et sa dérivée normale. Ce point nous aidera pour le calcul numérique du coefficient de réflexion.

La troisième démarche a été entreprise dans le but de valider les deux modèles précédents. Il s'agit d'effectuer des mesures systématiques dans le canal à houle du laboratoire en ajustant le cadre expérimental au cadre dans lequel a été développé la théorie et le modèle numérique.

II - Position du problème:

Nous considérons une houle incidente monochromatique, de faible amplitude, se propageant en présence de deux obstacles fixés sur le fond d'un canal (figure 1).

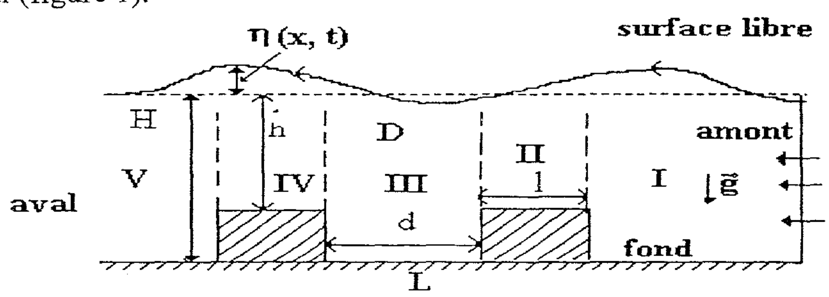

Figure.1: Schéma descriptif du domaine d'étude
Descriptif schema of the studied domain

Dans le cadre de la théorie linéaire de la houle, le mouvement est supposé plan, périodique et irrotationnel, et le fluide incompressible et non visqueux. La formulation choisie s'exprime en terme de potentiel des vitesses φ et de l'élévation de la surface libre η. Ces deux variables seront supposées complexes et leur dépendance par rapport au temps harmonique. Le potentiel des vitesse $\varphi(x,y,t)$ peut s'écrire sous la forme: $\varphi(x, y, t) = \phi(x, y)e^{-i\omega t}$ (1)

$\mathbf{i}$ est le nombre complexe tel que $\mathbf{i}^2=-1$, ω la pulsation de l'onde incidente et $\mathbf{t}$ le temps. (x,y) sont les coordonnées cartésiennes d'un repère galiléen R_g d'origine (0,0), l'axe des y est vertical dirigé vers le haut.

Dans le cadre de ces hypothèses, le problème de la propagation de la houle se ramène à la résolution du système d'équations suivant:

$$\Delta\phi(x, y) = 0 \quad \text{dans le domaine fluide D} \qquad (2)$$

$$\vec{U} = \vec{\nabla}\phi(x, y) \quad \text{dans le domaine fluide D} \qquad (3)$$

$$\vec{\nabla}\phi(x, y).\vec{n} = 0 \quad \text{sur le fond} \qquad (4)$$

$$-\omega^2\phi(x, y) + g\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y} = 0 \quad \text{sur la surface libre} \qquad (5)$$

$$\phi = \phi_a \quad \text{en amont} \qquad (6)$$

$$\eta = \frac{-i\omega}{g}\phi \quad \text{élévation de la surface libre} \qquad (7)$$

avec: H: la profondeur de l'eau, h: l'immersion de l'obstacle, g: l'accélération de la pesanteur, $\vec{n}$: la normale extérieure, $\vec{u}$: le vecteur vitesse et ϕ_a: le potentiel de la houle incidente en amont.

En aval, théoriquement on suppose que la houle transmise se propage sans réflexion. Cette condition se traduit numériquement par la condition de radiation:

$$\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial n} = ik\phi(x,y) \quad \text{en aval} \qquad (8)$$

C'est dans le cadre de cette théorie que nous développerons respectivement nos études théorique, numérique et expérimentale.

III - Etude théorique:

Dans le cadre de la théorie d'onde plane, nous décomposons le domaine de calcul en cinq sous-domaines I, II, III, IV et V (voir figure 1), et nous choisissons une forme analytique du potentiel de vitesse dans chaque sous-domaine:

- Dans la région **I:** $\phi_I = a\left(e^{-ik_1x} + Re^{+ik_1x}\right)ch(k_1(y + H))$
- Dans la région **II:** $\phi_{II} = a\left(A_2e^{-ik_2x} + B_2e^{+ik_2x}\right)ch(k_2(y + h))$
- Dans la région **III:** $\phi_{III} = a\left(A_3e^{-ik_1(x-l)} + B_3e^{+ik_1(x-l)}\right)ch(k_1(y + H))$
- Dans la région **IV:** $\phi_{IV} = a\left(A_4e^{-ik_2(x-l-d)} + B_4e^{+ik_2(x-l-d)}\right)ch(k_2(y + h))$
- Dans la région **V:** $\phi_V = aTe^{-ik_1(x-2l-d)}ch(k_1(y + H))$

où R, A_2, A_3, A_4, B_2, B_3, B_4 et T sont des contantes à déterminer.

k_1 et k_2 sont des nombres strictement positifs qui représentent les nombres d'onde dans chacun des sous-domaines. Ils vérifient les relations de dispersion suivantes:

$$\omega^2 = gk_1\, th(k_1 H) = gk_2\, th(k_2 h)$$

Les potentiels tels qu'ils sont définis ci-dessus satisfont aux équations et aux conditions aux limites du problème de la houle défini au second paragraphe.

Une fois ce choix de la forme du potentiel effectué, nous raccordons les solutions entre les sous-domaines, ce qui repose sur l'égalité des potentiels et la conservation des vitesses afin d'accéder à un système matriciel vérifié par les coefficients de réflexion R et de transmission T:

$$\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}[A]\begin{pmatrix} e^{-ik_1 d} & 0 \\ 0 & e^{ik_1 d} \end{pmatrix}[A]\begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix}$$

où

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-ik_2 l} & e^{ik_2 l} \\ k_2 E(J)^{-1} e^{-ik_2 l} & -k_2 E(J)^{-1} e^{ik_2 l} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ J(k_1 E)^{-1} & -J(k_2 E)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$E = \frac{sh(k_1 H) - sh(k_1(H-h))}{k_1}$$

$$J = sh(k_1 H)$$

La résolution de ce système matriciel permet donc de calculer le coefficient de réflexion R et le coefficient de transmission T.

IV - Etude numérique:

Le potentiel φ est calculé par une méthode intégrale. En effet l'application de la seconde identité de Green, permet d'exprimer φ sous forme intégrale de la manière suivante:

$$c\,\phi(x, y) = \int_{\partial D}\left[\frac{\partial\phi(\xi,\zeta)}{\partial n}G(r) - \phi(\xi,\zeta)\frac{\partial G(r)}{\partial n}\right]dS \qquad (9)$$

où $c = 0$ si $(x,y) \notin D \cup \partial D$, $c = 0.5$ si $(x,y) \in \partial D$ et $c = 1$ si $(x,y) \in D$.

G est la fonction de Green donnée par $G = -\frac{1}{2\pi}\ln(r)$; $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\varsigma)^2}$ est la distance entre les points de coordonnées respectives (x,y) et (ξ,ζ).

Dans la formulation numérique, la frontière est subdivisée en un nombre fini de M segments. On suppose que sur chaque segment, le potentiel et sa dérivée normale sont constants et on note les valeurs de ces derniers au milieu du segment i. Cette démarche permet d'obtenir le système algébrique suivant:

$$c\,\phi_i(x, y) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{M}\frac{\partial\phi_i}{\partial n_j}\int_{(x_j, y_j)}^{(x_{j+1}, y_{j+1})}\ln\frac{1}{r_j}ds_j - \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{M}\phi_j\int_{(x_j, y_j)}^{(x_{j+1}, y_{j+1})}\frac{\partial}{\partial n_j}\left(\ln\frac{1}{r_j}\right)ds_j \qquad (10)$$

Ce système est de M équations à 2 M inconnues, qui sont respectivement le potentiel et sa dérivée normale sur les frontières du domaine d'étude. Les M équations supplémentaires s'obtiennent par l'écriture des conditions aux limites.

Calcul du coefficient de réflexion:

Lorsque la houle rencontre un changement de profondeur, elle est en partie réfléchie et en partie transmise. Sur la frontière amont, nous aurons donc une superposition d'ondes: l'onde incidente $\phi_i = \phi_a$ et l'onde réfléchie ϕ_r. Cette constatation peut se traduire, dans le cadre de la théorie linéaire, sous la forme suivante:

$$\phi_i(x,y) = f(y)e^{ikx} \quad \text{et} \quad \phi_r(x,y) = R\,f(y)e^{-ikx} \qquad (11)$$

où f(y) une fonction liée aux caractéristiques de la houle incidente et R est le coefficient de réflexion.

La continuité du potentiel total et de sa dérivée normale permet d'accéder directement au calcul local du coefficient de réflexion R:

$$R = 1 - 2\left(\frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial n}}{ik\,\phi + \dfrac{\partial\phi}{\partial n}}\right) \qquad (18)$$

Le coefficient de réflexion R étant déterminé localement, nous effectuons une moyenne statistique pour l'exprimer d'une manière globale.

Sur la figure 2, nous présentons les résultats du calcul du coefficient de réflexion dans le canal en absence des obstacles pour H=0.22m.

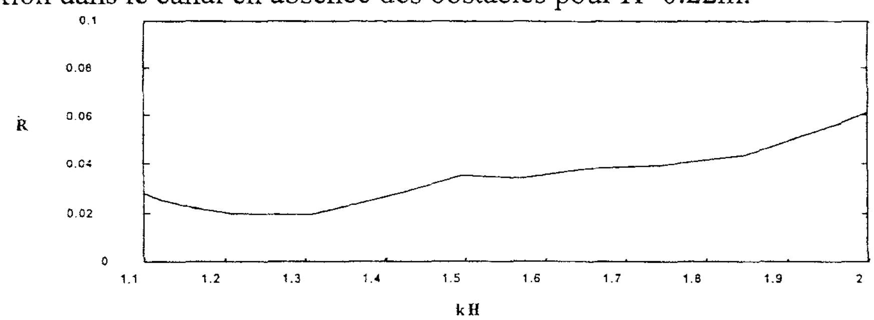

Figure 2: Coefficient de réflexion R en fonction de kH.
Reflection coefficient as a function of kH

Ces résultats permettent d'évaluer l'efficacité des conditions numériques d'absorption en aval. Nous pouvons constater que le maximum de réflexion étant de 5%.

V - Etude expérimentale:

L'expérience a été menée dans le canal à houle du Laboratoire. Ce canal est de longueur 6,5 m, de largeur 0,45 m. Il accueille d'un côté le batteur et de l'autre la plage d'amortissement. Le batteur à houle est de type volet avec une excentricité variable et il a été conçu de manière à générer une houle en profondeur finie et établir une houle monochromatique à une courte distance. Le mouvement de ce dispositif est généré par un moto-réducteur permettant de couvrir une gamme de fréquences de 0.5 à 2.5 hz. Le dispositif constituant la plage d'amortissement se compose d'un assemblage de tiges cylindriques plastifiées, espacées de 5cm environ et recouvertes de molleton synthétique. Nous maintenons une inclinaison optimale de la plage afin de minimiser la réflexion. La méthode de mesure du coefficient de réflexion est basée sur la technique des nœuds et des ventres. Cette méthode nous a permis de déterminer expérimentalement le coefficient de réflexion de la plage d'amortissement R pour H=0.22m (voir figure 3), en l'absence d'obstacle.

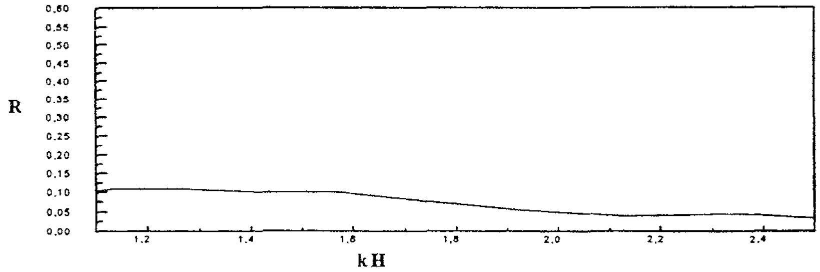

Figure 3: Coefficient de réflexion R en fonction de kH
Reflection coefficient as a function of kH

L'examen des houles générées dans le canal est résumé dans le tableau suivant:

T (batteur) (s)	T Mesurée (s)	a mesurée (cm)	λ calculée (m)	λ mesurée (m)	H/λ	2a/λ
1.176	1.200	0.40	1.54	1.60	0.138	5.10^{-3}
1.070	1.080	0.42	1.37	1.20	0.183	7.10^{-3}
0.840	0.850	0.54	0.95	0.97	0.227	0.011
0.735	0.737	0.67	0.79	0.75	0.293	0.018
0.654	0.650	0.71	0.64	0.64	0.343	0.022
0.588	0.587	0.71	0.53	0.51	0.431	0.028

Tableau 1: Comparaison des longueurs d'ondes théoriques et expérimentales
Comparison between the theoretical and experimental waves numbers

T est la période (seconde), λ est la longueur d'onde, a est l'amplitude de l'élévation de la surface libre et H est la profondeur.

Ces résultats montrent une bonne concordance entre les mesures expérimentales et les valeurs calculées. On en déduit que les houles générées se situent dans le domaine des houles simples en profondeur finie.

VI - résultats:

Les deux obstacles rectangulaires, étudiés dans ce travail, sont de même longueur, épousent la largeur du canal (0.25m) et ont une hauteur de 0.11m. Ils sont fixés sur le fond du canal et espacés d'une distance d. Un soin particulier a été donné à l'ajustement latéral des deux obstacles sur les deux côtés du canal.

Pour l'ensemble de nos résultats, nous avons choisi une seule configuration qui correspond à une immersion (h/H) de 50% et l/h=2.27. Nous présentons le coefficient de réflexion en fonction de l'immersion relative (sans dimension) kh. Nous exprimerons ainsi les caractéristiques de la réflexion en fonction du paramètre de dispersion associé à l'immersion de l'obstacle.

Sur la figure 4 nous présentons une confrontation des résultats numériques, analytiques et expérimentaux, en comparant la variation du coefficient de réflexion en fonction de kh pour un espacement de d = l.

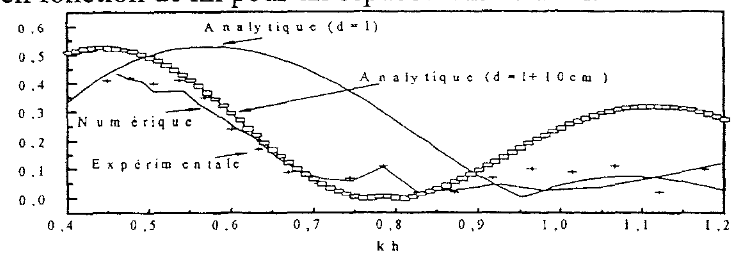

Figure 4: R en fonction de kh: d = l.
Reflection coefficient as a function of kH: d=l

Nous constatons une bonne concordance des résultats numériques et des mesures expérimentales. Le modèle d'onde plane donne une surestimation du coefficient de réflexion. Ce décalage est dû au fait à l'existence des modes évanescents. Ces modes sont locaux et ils s'annulent une fois que nous nous éloignons des obstacles. D'où l'idée de donner à l'obstacle une longueur apparente différente de sa longueur réelle. En introduisant dans le modèle analytique d'onde plane une longueur apparente des obstacles (par l'intermédiaire d'une correction Δl sur la longueur des obstacles de manière à donner à l'obstacle une longueur apparente $l + \Delta l$), nous constatons sur les résultats de la figure 4 une nette amélioration du coefficient de réflexion calculé par le modèle d'onde plane pour les valeurs de kh inférieurs à 0.9.

Cette notion de longueur apparente peut être justifiée par le fait que nous avons négligé les modes évanescents dans le modèle analytique, ou bien par la présence de tourbillons au voisinage de l'obstacle.

Nous avons balayé une plage de longueurs d'onde pour le calcul direct du coefficient de réflexion. Les résultats obtenus numériquement sont présentés sur la figure 5 pour différents espacements des deux obstacles: d/l=1, d/l=0.25, d/l=0.5 et d/l=0.75. Les principales constatations sont:

- Pour tous les espacements, le maximum du coefficient de réflexion se trouve dans la zone voisine de kh = 0.5. L'effet d'atténuation dans cette zone est important quand l'espacement est de l'ordre de la longueur de l'obstacle.

-Il existe une zone d'ombre pour laquelle le coefficient de reflexion est minimal. Cette zone se trouve approximativement au voisinage de kh=0.8. Cette valeur correspond à un espacement de l'ordre de la demi-longueur d'onde.

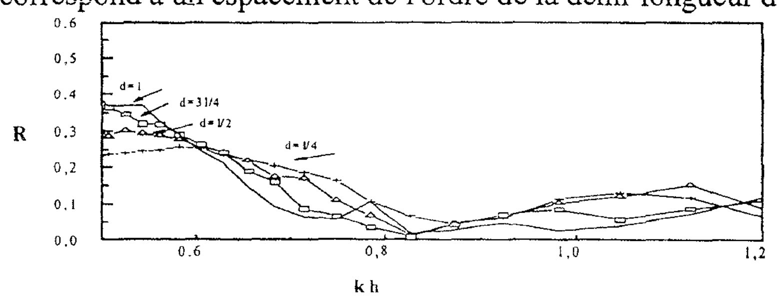

Figure 5: R en fonction de kh pour d =l, d=3l/4, d=l/2 et d =l/4.
Reflection coefficient as a function of kH: d=l, d=3l/4, d=l/2 et d =l/4.

VII - Conclusions:

Le travail que nous avons présenté ici avait comme objectifs la valididation du code de calcul numérique et une discussion sur la validité du modèle d'onde plane. L'exploitation de ces deux outils nous a permis d'une part d'atteindre nos objectifs et d'autres part d'ouvrir une voie vers la compréhension des processus de dissipation de la houle par ce type d'atténuateurs. En effet le code de calcul numérique développé s'avère efficace pour le calcul du coefficient de réflexion lors du passage d'une houle monochromatique sur un obstacle constitué de deux marches rectangulaires fixées sur le fond d'un canal. Cette affirmation est basée sur le bon accord avec les résultats d'essais expérimentaux que nous avons éffectués au sein de notre laboratoire.

Nous constatons que les ondes longues sont plus réfléchies que les ondes courtes. D'un autre côté, moyennant les outils numérique, analytique et expérimental que nous avons utilisés, nous avons remarqué que la distance entre les deux obstacles joue un rôle très important dans la réflexion de la houle. En effet chaque fois que cette distance est un multiple de la demi-longueur d'onde de l'onde incidente, tous ce passe comme si les obstacles était collés.

En perspective, nous proposons l'amélioration des méthodes analytiques par la quantification de la notion de la longueur apparente les modes évanescents et de l'aspect tourbillonnaire qui, à notre avis, peut constituer une explication plausible de cette notion.

VIII - Références:

[1] Miles J. W. (1967), - Surface wave scattering matrix for a shelf,J. Fluid Mech, 28, p. 755-767.

[2] Mei C. C et Black J. L.(1969), - Scattering of surface waves by rectangular obstacles in water of finite depth, J. Fluid Mech, 38, p. 499-511.

[3] Rey V. (1996), - Propagation and local behaviour of normally incident gravity waves over varying topography, Eur. J. Mech. B/Fluid, 11, p. 213-232.

[4] Mordane S., Chahine C., Naasse S. et Chagdali M. (1999), - Propagation d'une onde de gravité sur un obstacle rectangulaire immergé: Etude numérique et expérimentale, 4ème congrès de Mécanique, Mohammadia, Maroc, p. 101-102.

[5] Rey V. (1991), - Propagation d'ondes de gravité au dessus de fonds solides ou constitués de sédiments, Thèse d'université, Université de Provence Marseille France, 1991.