



Application d'un modèle tridimensionnel de la circulation marine au transport et à la diffusion d'un rejet d'effluent

D. Khatib* & M. Chagdali**

**Doctorant, Faculté des Sciences Ben M'Sik, L.C. S. M Casablanca.*

***Professeur, Faculté des Sciences Ben M'Sik, L.C. S. M Casablanca.*

Résumé :

On se propose de résoudre numériquement un problème de diffusion d'un rejet d'effluent émis par un émissaire au fond de la mer en tenant compte des courants de marées dans un domaine tridimensionnel. L'écoulement présente une surface libre. Le fond marin est supposé de géométrie arbitraire. Deux types de frontières latérales sont considérés; frontières solides irrégulières et frontières ouvertes. Pour représenter la circulation dans les trois dimensions, on est amené à découpler le domaine en un domaine 2D en terme de vitesses moyennes horizontales et un modèle 1D en terme de vitesses de fluctuations sur la verticale. Pour calculer le cheminement et la dispersion du polluant, on intègre numériquement l'équation tridimensionnelle de la conservation de la masse du polluant.

Abstract:

The investigation concern a numerical study of the diffusion process of an effluent ejected by an emissary to the bottom of the sea by taking into account the current of tides in a three-dimensional. The flow presents a free surface. The marine bottom is supposed of arbitrary geometry. Two lateral frontiers types are considered : irregulars solids frontiers and opened ones. In order to represent the circulation in three dimensions, one is brought to uncouple the volume in 2D area in terms of horizontal average speeds and a 1D model in term of fluctuation speeds on the vertical. To determine the trajectory and to calculate the dispersion of the pollutant, one integrates numerically the three-dimensional equation of the conservation of the mass of the pollutant

1. Introduction :

L'écoulement des rejets d'eau usée dans la mer, comme tout autre écoulement à surface, présente des caractéristiques tridimensionnelles d'une façon prédominante en plus d'une nature hautement instationnaire. Notre objectif est de s'approcher à la réalité physique d'un tel comportement de rejet dans la mer, ce qui nous oblige à introduire les différents phénomènes hydrodynamiques relatifs à la mer en particulier l'effet de la marée littorale. On se propose donc de résoudre en même temps la diffusion et le transport du rejet d'effluent par les courants marins. On expose respectivement le code de la circulation marine et la résolution de l'équation de la diffusion du rejet. Ensuite on propose une manière de faire le couplage des deux codes.

2. Formulation du problème de la circulation marine:

Le problème de la circulation marine est d'une importance majeure dans le génie côtier et le génie portuaire. La résolution numérique directe de ce problème tridimensionnel renferme plusieurs difficultés qu'on peut résumer sur l'écriture des coefficients d'échange turbulents, la présence de la surface libre, l'écriture des conditions aux limites sur les frontières ouvertes sur l'océan et les frontières courbes. Pour surmonter ces difficultés, différents types de modélisations sont proposées dans la littérature. Dans le problème de propagation d'ondes longues en eau peu profonde, les gradients horizontaux sont négligeables devant les gradients verticaux. Il paraît commode de découpler les grandeurs horizontales et verticales de la circulation marine. Cela consiste donc à combiner un modèle horizontal à deux dimensions et un modèle vertical à une dimension (Nihoul et Salomon 1981) C'est ce modèle qui fera l'objet de ce travail. On s'attache plus particulièrement à résoudre la difficulté du traitement numérique des conditions aux limites sur les frontières courbes et sur les frontières ouvertes sur l'océan.

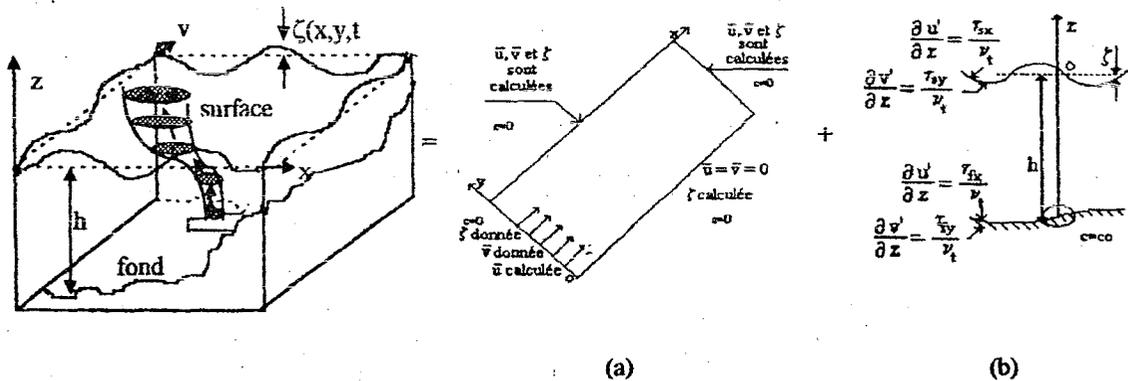


Fig 1: Propagation d'un rejet d'effluent dans la mer: (a) Coupe bidimensionnelle horizontale (b) Coupe unidimensionnelle verticale et conditions aux limites

2.1 Modèle bidimensionnel horizontal 2D:

Le problème bidimensionnel horizontal (P_1) peut être formulé à l'aide de l'intégration, sur la verticale, des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Les conditions aux limites et le domaine d'étude sont illustrées sur la figure 1-a.

$$P_1 \begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f \bar{v} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + a \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{D}{H} \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} - \frac{C}{H} W_x \|W\| \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + f \bar{u} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + a \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) + \frac{D}{H} \bar{v} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} - \frac{C}{H} W_y \|W\| \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (H \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (H \bar{v}) = 0 \end{cases}$$

+ Conditions aux limites et conditions initiales.

Où: $\vec{U}(\bar{u}, \bar{v})$ est la vitesse moyenne horizontale des particules fluides, z est l'élévation de la surface libre, $h(x,y)$ est la profondeur, a est un paramètre de diffusion horizontal, D est un coefficient d'entraînement, f est le paramètre de Coriolis, P_a est la pression, W , W_x et W_y sont respectivement la vitesse du vent à la surface libre et ses composantes. g est l'accélération de la pesanteur.

2.1.1 Résolution numérique du problème horizontal.

La méthode de résolution numérique est la méthode des différences finies. On exposera par la suite les outils numériques pour traiter les conditions aux limites sur les frontières courbes et les frontières ouvertes. Afin de faciliter l'écriture des conditions aux limites sur les frontières courbes du domaine d'étude, on utilise un système de coordonnées curvilignes orthogonales (ξ, η) qui épouse les frontières et qui transforme le domaine bidimensionnel horizontal à frontières irrégulières en un domaine de géométrie simple rectangulaire. Pour la construction d'un tel système de coordonnées, on se ramène à résoudre, numériquement par la méthode des singularités, un problème auxiliaire, qui est celui de l'écoulement d'un fluide parfait incompressible et irrotationnel, dans le même domaine physique. Les lignes de courant et les équipotentielles de l'écoulement auxiliaire considéré seront donc les coordonnées ξ et η . Le principe de la méthode des singularités qui permet de générer ce système de coordonnées consiste à discrétiser le contour du domaine d'étude en segments, sur chacun desquels, on considère une ou plusieurs densités de singularités. Le logarithme du module de la transformation $\log(Q)$ est également harmonique, il est calculé numériquement (M.Chagdali et A.Hemon 1989). Pour ce qui est des frontières ouvertes, l'aval et la partie supérieure (cf. figure 1), on fait intervenir la condition de radiation de Sommerfield avec différents schémas numériques aux différences finies. Ce schéma combine la méthode d'O'Brien, d'Orlanski et de Hang, Meng et Innis. En effet la condition de Radiation de Sommerfield utilisée est la suivante:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + F \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0$$

Où f désigne les trois composantes; u, v , et ξ . F est la vitesse de phase.

Pour les deux composantes de la vitesse, la vitesse de phase est calculée d'une manière particulière en tenant compte des points voisins de la limite et 3 niveaux de temps précédents:

$$F = - \left(\frac{P_{NX,j}^n - P_{NX,j}^{n-2}}{P_{NX,j}^n + P_{NX,j}^{n-2} - R_{NXi,j}^n - R_{NX,j}^{n-2}} \right) \frac{2\Delta\xi}{\Delta t}$$

$$\text{Avec: } P_{NX,j} = \frac{1}{2} (f_{NXi-1,j-1} + f_{NX-1,j+1}) \quad R_{NX,j} = \frac{1}{2} (f_{NXi-3,j-1} + f_{NX-3,j+1})$$

La valeur de $f_{NX,j}^{n+1}$ sur la frontière s'écrit donc:

$$f_{NX,j}^{n+1} = P_{NXi,j}^n \quad \text{si } F > 0 \text{ (Flux sortant)} \quad f_{NX,j}^{n+1} = f_{NXi,j}^{n-1} \quad \text{si } F \leq 0 \text{ (Flux entrant).}$$

Quant à l'élévation de la surface libre ξ , la vitesse de phase F est calculée à partir d'un seul niveau de temps:

$$F = - \left(\frac{\zeta_{NX-1,j}^{n+1} - \zeta_{NX-1,j}^n}{\zeta_{NX-1,j}^{n+1} - \zeta_{NX-2,j}^n} \right) \frac{\Delta\xi}{\Delta t}$$

Un test sur la vitesse de phase par rapport à $(D\zeta/Dt)$ se fait comme pour les conditions classique d'Orlanski.

La valeur de $\zeta_{NX,j}^{n+1}$ extrapolée sur le bord s'écrit donc:

$$\zeta_{NX,j}^{n+1} = \left(\zeta_{NX,j}^n + F \frac{\Delta t}{\Delta \zeta} \zeta_{NX-l,j}^{n+1} \right) / \left(1 + F \frac{\Delta t}{\Delta \zeta} \right)$$

Cette technique basée sur des considérations physiques intuitives extraites de la bibliographie, a donné des résultats très satisfaisants (Chagdali, Ouenza 1997). En effet ce traitement a permis d'adapter le traitement numérique aux variations des caractéristiques des équations du mouvement.

2. 2 Modèle unidimensionnel vertical:

De même, le problème unidimensionnel vertical sur l'axe oz peut être formulé, en terme des fluctuations sur la verticale, à l'aide des équations (P_2). Le domaine d'étude et les conditions aux limites sont illustrés sur la figure 2.

$$P_2 \begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial t} + A_x - fv' = \frac{\partial}{\partial z} \left(v_t \frac{\partial u'}{\partial z} \right) - \frac{\tau_{sx} - \tau_{fx}}{(h + \zeta)} \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + A_y + fu' = \frac{\partial}{\partial z} \left(v_t \frac{\partial v'}{\partial z} \right) - \frac{\tau_{sy} - \tau_{fy}}{(h + \zeta)} \\ + \text{Conditions aux limites} \\ + \text{Conditions initiales} \end{cases}$$

Où A_x et A_y sont des termes d'inertie spatiale (Chagdali, Ouenza 1997). $\vec{U}(u', v')$

est le vecteur vitesse des fluctuations turbulentes. $\vec{\tau}_s(t_{sx}, t_{sy})$ et $\vec{\tau}_f(t_{fx}, t_{fy})$ sont respectivement les tensions en surface et sur le fond marin. Les termes A_x et A_y sont calculés en fonction du courant moyen dans le plan horizontal. La vitesse verticale w est calculée à partir de l'équation de continuité.

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial y}$$

2.2.1 Résolution numérique du problème vertical:

Dans la résolution numérique du modèle unidimensionnel, pour surmonter les difficultés d'écrire les conditions aux limites sur la surface libre et sur le fond variable, on utilise une transformation analytique qui transforme le domaine irrégulier et évolutif $[-h(x,y), x(x,y,t)]$ en un domaine fixe $[0,1]$.

$$Z = \frac{z+h}{\zeta+h}$$

Cette transformation a été largement utilisée, soit pour la propagation de la houle (S.Mordane 1996) soit dans les études de la marée (J.C. Salomon 1984, A. El Moussaoui en 1995).

2.3 Modèle 2D + 1D:

Le problème complet (2D+1D) est résolu numériquement, dans le plan transformé, par la méthode des différences finies. Le terme d'advection dans le modèle unidimensionnel est exprimé en fonction des vitesses moyennes

horizontales (\bar{u}, \bar{v}) et de l'élévation de la surface libre z qui sont fournis par le modèle bidimensionnel moyen. Il fait aussi appel aux vitesses des fluctuations turbulentes (u', v') et la vitesse verticale w qui à leurs tour sont fournis par le modèle unidimensionnel vertical. Le champ du courant varie fortement près du fond marin et près de la surface libre ce qui nécessite une discrétisation avec un pas variable. Cette variabilité du pas se manifeste par un serrage au voisinage des limites; Surface libre et fond marin, ensuite un desserrage au centre. Le calcul des intégrales dans le terme d'advection est fait par la méthode des trapèzes en tenant compte de la variabilité du pas d'espace.

2.4 Résultats sur la circulation marine:

On considère un domaine marin à trois frontières latérales ouvertes sur l'océan. Le fond marin est variable (plan incliné de profondeur moyenne $H_m=150m$). La longueur du domaine est $L=1.6 \cdot 10^6 m$, sa largeur est $l=5 \cdot 10^5 m$. A la surface libre, initialement au repos, on applique à l'entrée du domaine une onde sinusoïdale de pulsation ω . (cf. fig.1). Pour pouvoir tester les conditions aux limites numérique sur les deux frontières ouvertes, on utilise deux domaines de largeurs et de longueurs différentes. Sur les figures 3a - 3b, on présente respectivement les iso-valeurs de la composante en x et en y de la vitesse moyenne horizontale pour les deux domaines.

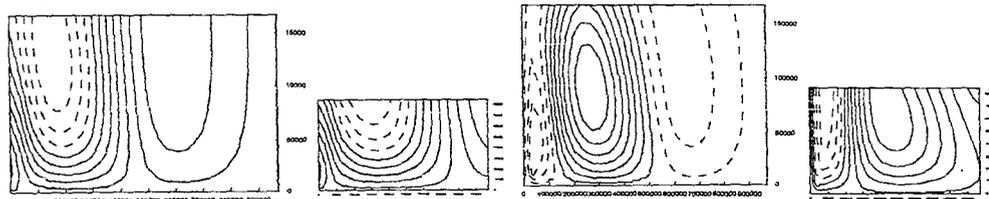
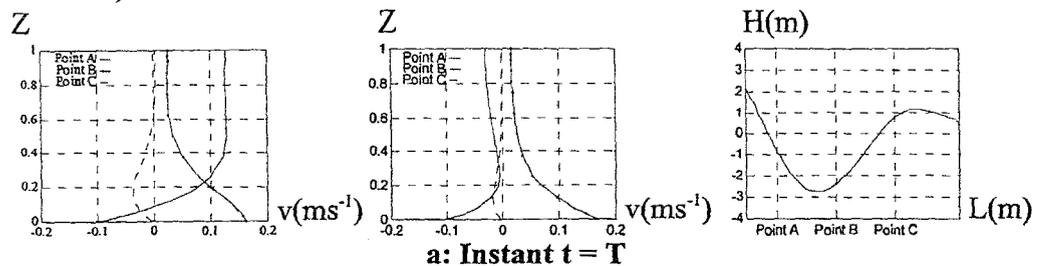


Fig3a : Iso-valeurs de la composante en x de la vitesse moyenne horizontale Fig3b : Iso-valeurs de la composante en y de la vitesse moyenne horizontale

La comparaison entre les résultats du grand domaine et du petit domaine montre bien que les conditions aux limites imposés sur les trois frontières permettent le passage de l'onde sans affecter la solution à l'intérieur du domaine. On présente sur la figure 4 les profiles verticaux du champs total le long de l'axe oZ en différents points du domaine horizontal et pour différents instants. Sur la figure 5 on trace l'élévation de la surface libre correspondante à chaque instant. On peut voir à travers ces courbes, les phénomènes liés à la marée(montée, descente, renverse).



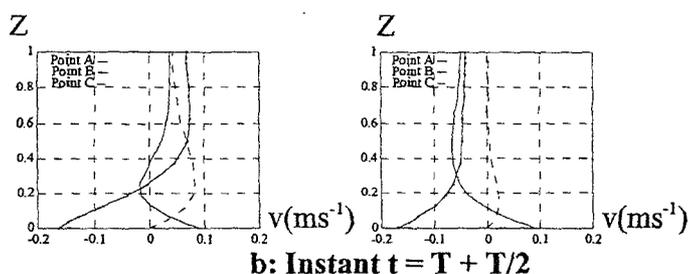


Fig. 4 Profils des composantes du champ total le long de l'axe vertical oZ en différents points du doaine, pour différents instants

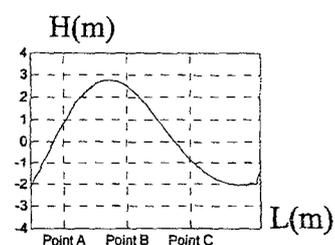


Fig. 5 Elévation de la surface libre correspondante

L'observation montre le changement de pente des profils de vitesse avec la situation des creux et des crêtes de la surface libre et que les points d'inflexion qui apparaissent sur certaines courbes montrent le couplage entre la propagation en surface et le comportement du fond.

Pour pouvoir illustrer l'apport de la structure verticale de l'écoulement, on dresse, sur la figure 6 pour un instant « $t=T$ », la carte de courant relative au courant moyen horizontal. Sur la figure 7, on trace l'élévation de la surface libre correspondante.

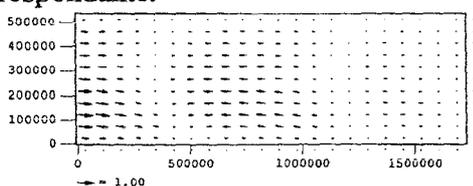


Fig. 6: Champs du courant horizontal moyen

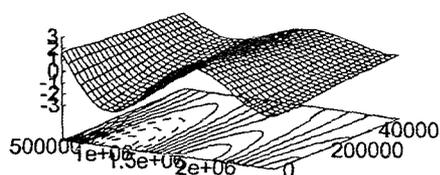


Fig7: Présentation de l'élévation de la surface libre

Le code de calcul qu'on a construit pour l'étude de propagation d'onde de marré peut se généraliser à plusieurs domaine marin. Sur la figure 8-a, on présente pour le modèle horizontal un domaine à une frontière ondulée et trois régulier. Les iso-valeurs de la composante en y de la vitesse moyenne horizontale à un instant donné sont présentées sur la figure 8-b.

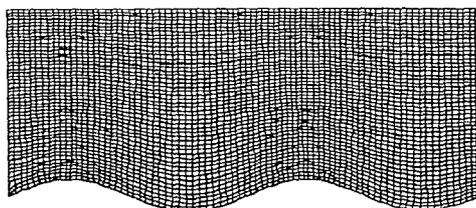


Fig 8.a : Domaine à une paroi ondulés et trois variable

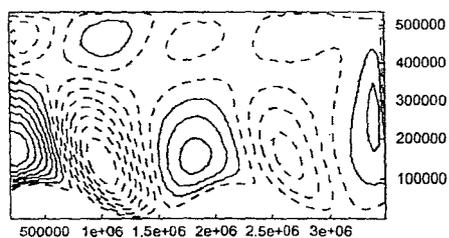


Fig 8.b Iso-valeurs de la composante en y de la vitesse moyenne horizontale

3. Problème de la diffusion du rejet.

On considère l'écoulement instationnaire, turbulent d'un rejet d'effluent d'eau usée, incompressible et de flottabilité positive, la densité du rejet est

inférieur à la densité de l'eau de mer. La diffusion et le transport du rejet d'effluent peut être formulé en terme de la concentration de la manière suivante.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(uc)}{\partial x} + \frac{\partial(vc)}{\partial y} + \frac{\partial(wc)}{\partial z} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$$

D_x , D_y et D_z sont les coefficients de diffusion. suivant les trois direction ox , oy et oz . Le domaine verticale étant limité par une surface libre, qui est évolutive et un fond marin qui est de géométrie arbitraire, le domaine est donc irrégulier et évolutif. A cet effet, on a procédé par une transformation analytique du domaine évolutif en un domaine fixe et régulier. Un maillage non uniforme sur la verticale est utilisé pour s'affranchir des difficultés de calcul des gradients verticaux au niveau du fond marin et de la surface libre (D. KHATIB 1997).

3. 1 Résolution numérique de l'équation transformée de diffusion du rejet:

La méthode de résolution numérique utilisés est la technique des directions alternés implicite proposée par Douglass. Les conditions aux limites sont de type Dirécklet, le calcul numérique est donc effectué dans le domaine cubique transformé.

3. 2 Résultats sur la diffusion du rejet sans circulation marine:

Pour tester la validation du schéma numérique proposé on a assimiler la diffusion du polluant dans un bassin rectangulaire. Le champs de vitesse est considéré nul et les composantes u , v et w sont fixées à zéro partout dans le domaine. L'énergie du système provient uniquement de l'écart de densité entre le milieu récepteur et l'effluent. Les figures 9-10-11 présentent l'évolution de l'écoulement par des séquences séparées, d'un quart de période et une période. Elles présentent, d'une part, une projection dans les plans longitudinaux oyz et oxz , d'autre part, une projection dans le plan transversal oxy .

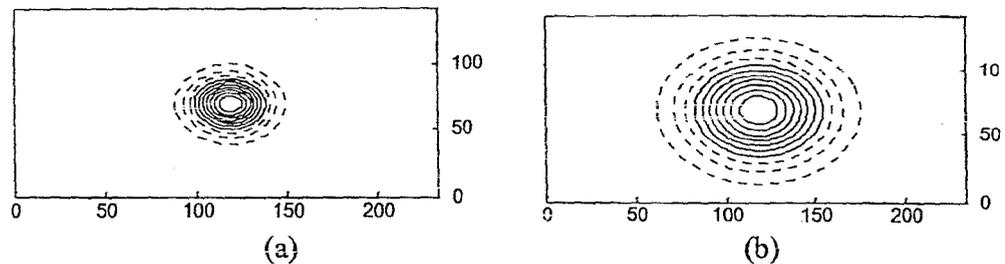


Fig. 9: Iso-valeurs de la concentration dans le plans oxy, $k=10$, (a: $t=T/4$, b: $t=T$)

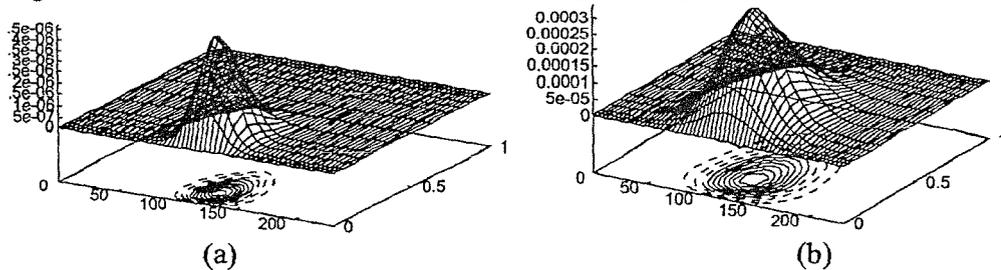


Fig.10 : Iso-valeurs de la concentration dans le plans oz, $j=4$, (a: $t=T/4$, b: $t=T$)

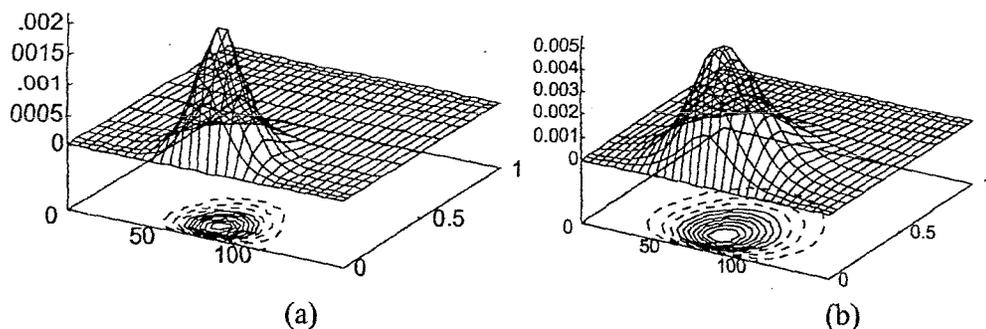


Fig. 11 Iso-valeurs de la concentration dans le plans oyz , $i=25$ (a: $t=T/4$, b: $t=T$)

On constate, aussitôt que le modèle commence à établir le régime d'écoulement, la diffusion du rejet commence dans tous le bassin.

4. Couplage de l'équation de la diffusion avec la circulation marine:

L'objectif de la présente section est de résoudre numériquement le problème de diffusion d'un rejet d'effluent émis par émissaire prolongé au fond de la mer en tenant compte des effets du vent et des courants de marées dans un domaine tridimensionnel. On est donc ramené à résoudre la problème complet de la circulation marine (2D+1D) et l'équation tridimensionnelle de la diffusion. Le domaine d'étude du problème de rejet est très petit devant celui du problème de la circulation marine. Par conséquent le champ de vitesse moyenne dans le plan horizontal reste presque uniforme dans le domaine d'étude du rejet. De même la surface libre reste presque linéaire. A cet effet on a moyenné le champ de vitesse moyenne et la surface libre dans le domaine d'étude du rejet alors que le champ de vitesse fluctuante est moyenné dans le plan horizontale oxy , et varie suivant le vertical oz .

4.1 Résultats:

Pour s'approcher de la réalité de la diffusion du rejet d'effluent dans la mer, on a tenu compte d'une part, du champ de courant en fonction du temps et d'autre part du vent. Pour cela le modèle décrit à la section précédente a été mis on oeuvre pour simuler un certain nombre de situations dans le but de mieux situer ses avantages et de tester la sensibilité du modèle aux changements de configuration. Dans cette série de simulations on considère un bassin rectangulaire pour le domaine de rejet similaire au domaine dans le cas 1, et un autre bassin, relativement au domaine de la circulation marine, qui est très grand devant le premier. Les conditions initiales consistent à supposer un champs de vitesse nulle partout dans le domaine. Sur les figures 12 et 13, on montre les séquences de l'évolution du champs de concentration dans différents plans transversaux et longitudinaux en présence du courant marin.

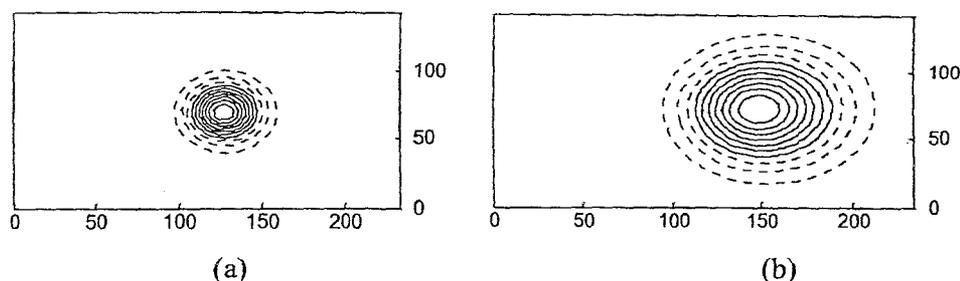


Fig.12: Iso-valeurs de la concentration dans le plans oxy, $k = 10$, (a: $t=T/4$,b: $t=T$)

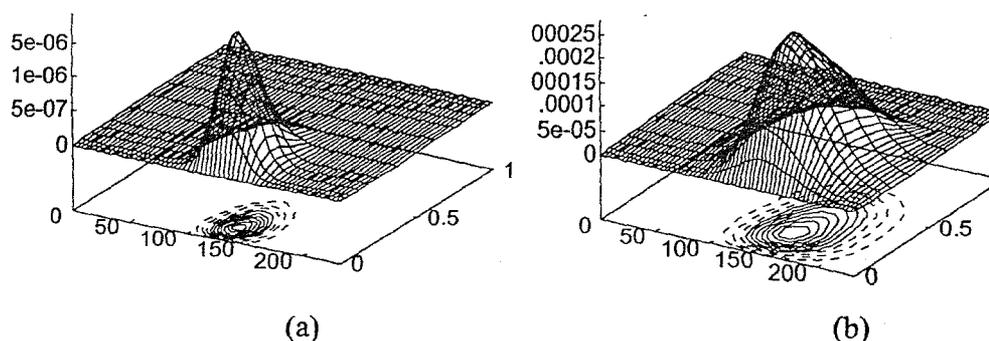


Fig. 13: Iso-valeurs de la concentration dans le plans oxz, $j=28$, (a: $t=T/4$, b: $t=T$)
 On constate que le courant induit pénètre graduellement dans les couches profondes et tend à pousser et à accumuler le polluant à l'extrémité droite du bassin. Ce phénomène est plus accentué à mesure que l'intensité des courants est importante. L'intervention des courants marins assure plus le mélange et par conséquent la dilution du polluant.

5. Conclusion et perspectives

On a construit un code de calcul numérique qui traite un problème tridimensionnel (2D+1D) de la circulation marine dans des domaines de géométrie quelconque et à frontières ouvertes sur l'océan. Une transformation numérique du domaine horizontal combinée à une transformation analytique du domaine vertical a permis une bonne adaptation du maillage aux frontières du domaine. Un traitement numérique particulier des conditions aux limites a donné des résultats satisfaisants. Les résultats qu'on a présenté sont relatifs à la propagation de la marée littorale et la dispersion du polluant. A partir de l'analyse de ces résultats obtenues, on peut avancer que le modèle a démontré une capacité intéressante à simuler des écoulements complexes de nature tridimensionnelle. Le modèle constitue ainsi un outil valable pour traiter des cas plus complexes. En perspectives, on pense appliquer notre modèle numérique à des régions marines réelles telles que les baies, les ports. Le renforcement du couplage et l'étude du transport et l'étalement du rejet à la surface de la mer, sont aussi envisagés.

Références :

- J..J.O'BRIEN, L.ALEJANDRO& CAMERLENGO** 1980 *Open boundary conditions in rotating fluids*» Jour. of Comp. phy. 35, 12-35
- T.Y.HAN, J.C.S.MENG & G.E.INNIS**, 1983, "An open boundary condition for incompressible stratified flows» Jour. of comp. phy. 49, 276-297
- M.CHAGDALI A.HEMON**, 1989«*Résolution numérique d'un problème de convection naturelle dans une cavité à frontières courbes* » 4ème Journées Internationales de Thermique Tome 1 p 137 Alger.
- J.C.J.NIHOUL**, « *Hydrodynamic models of shallow continental seas, application to the North sea* » Etienne Riga, éditeur
- I.ORLANSKI**, 1976,«*A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows*» Jour. of Comp. physics 21, 251-269
- J.C.SALOMON, P.LEHIR**, 1981, « *Étude de l'estuaire de la seine, Modélisation numérique des phénomènes physiques* » Université de Bretagne occidentale, Faculté des Sciences et Techniques. Laboratoire d'Océanographie Physique.
- D. KHATIB** 1997 « Simulation numérique d'un jet flottant de rejet d'eau usée dans l'ocean » Thèse de 3ème cycle . Faculté des Sciences Ben M'sik Casablanca Maroc.
- S.OUENZA** 1997« Simulation numérique des marées littorales. Transport et étalement des nappes d'hydrocarbure en mer » Thèse de 3ème cycle . Faculté des Sciences Ben M'sik Casablanca Maroc.
- S. MORDANE** 1995« Calcul du problème de la houle non linéaire et instationnaire par une méthode asymptotique numérique» Thèse de 3ème cycle . Faculté des Sciences Ben M'sik Casablanca Maroc.
- EL. MOUSSAOUI** 1994 « Modélisation numérique des d'un upwelling côtier sur la façade atlantique marocaine » D.E.A européen en modélisation de l'environnement marin.
- J. DOUGLASS** « Alternating directions methods for three spaces variables » Numerische Math., Vol4 p.41-63 1962).
- M. CHAGDALI, S. OUENZA** 1997 « Modélisation numérique de la circulation marine dans un domaine tridimensionnel de géométrie arbitraire » Bordomer 97, Coastal Environment Management and Conservation 27-29 Octobre 1997.