



**METHODES DE VRAISEMBLANCE MAXIMALE POUR  
LA SEPARATION D'ONDES DE GRAVITE MULTI-DIRECTIONNELLES  
EN BASSIN A HOULE**

Valérie LEROY et Mamoun NACIRI ✦  
Océanide Port de Brégaillon BP 63  
83502 La Seyne/Mer

✦Single Buoy Moorings Inc. - 24 Avenue de Fontvieille BP 199  
MC 98007 Monaco Cedex

L'application de la méthode de vraisemblance maximale (Maximum Likelihood Method, MLM) à la séparation d'ondes de gravité multi-directionnelles en bassin à houle est décrite à travers l'analyse de signaux synthétiques. Les limitations de cette méthode sont mises en évidence notamment lorsque plusieurs ondes de même fréquence et de directions différentes cohabitent dans le bassin. La MMLM (Modified Maximum Likelihood Method) d'Isobe et Kondo (1984), qui comble la lacune précédente, est présentée puis illustrée.

**1. Introduction**

La réalisation d'essais en modèle réduit requiert la connaissance précise des ondes incidentes sur la structure étudiée. Quand la taille du moyen d'essai est relativement faible, la durée d'un essai est longue ou la structure est très réfléchissante, une mesure ponctuelle d'élévation de surface libre ne permet plus de discerner la houle incidente des multiples réflexions existantes. Il est alors impératif de recourir à des méthodes de séparation d'ondes telles que celle de Goda and Suzuki (1976), Mansard & Funke (1980) ou encore Isaacson (1991). Ces méthodes supposent, cependant, des ondes incidentes et réfléchies colinéaires. Lorsque des structures portuaires tri-dimensionnelles sont reproduites en modèle réduit, les ondes réfléchies ne sont plus nécessairement colinéaires à l'onde incidente. Dans ce contexte, l'opportunité de méthodes de séparation d'ondes multidirectionnelles est certaine. Deux telles méthodes sont décrites puis testées afin d'en évaluer les performances. La méthode de vraisemblance maximale (Maximum Likelihood Method, MLM) permet, grâce à l'analyse des déphasages au droit de plusieurs capteurs de mesure, la caractérisation de l'amplitude, de la phase et de la direction des différentes ondes en présence. Le parti a été pris d'utiliser des signaux synthétiques simples pour évaluer clairement les performances des méthodes de vraisemblance. Il ressort de cette étude que les performances de la méthode MLM se dégradent dès lors qu'il existe à une fréquence plusieurs ondes provenant d'au moins deux directions différentes. C'est typiquement ce qui se produit dans un bassin à houle en présence de réflexion. La méthode MLM a été modifiée (Modified Maximum Likelihood Method, MMLM) par Isobe et Kondo (1984) dans le but d'en généraliser son domaine d'application. Les performances de cette nouvelle méthode sont étudiées à nouveau à l'aide de signaux synthétiques en supposant la superposition d'ondes monochromatiques. Des conclusions sont données sur les perspectives d'utilisation des méthodes MLM en bassin à houle tridimensionnel.

## 2. Méthode de Vraisemblance Maximale (MLM)

### 2.1 Généralités

C'est à Capon (1969) que l'on doit la méthode MLM dont le principe repose sur l'analyse des déphasages entre plusieurs sondes limnimétriques disposées en réseau au passage d'un train de vague. Le nombre de sondes et leur agencement en réseau sont autant de paramètres dont dépend l'efficacité de la méthode. Plus récemment, Oakley and Lozow (1977) et Jefferys et al. (1981) se sont également penchés sur cette méthode en étudiant en particulier la dégradation des performances induite par la présence inévitable de bruit de fond.

### 2.2 Formulation

Soit  $\bar{x}(\omega, \theta)$  le vecteur formé des déphasages complexes entre chacune des  $M$  sondes et l'origine pour une onde de gravité de pulsation  $\omega$  et se propageant dans la direction  $\theta$  :

$$\bar{x}(\omega, \theta) = \left[ e^{j\bar{k}\cdot\bar{r}_1}, e^{j\bar{k}\cdot\bar{r}_2}, \dots, e^{j\bar{k}\cdot\bar{r}_M} \right]^T \quad (2.1)$$

où  $\bar{k} = \frac{2\pi}{\lambda} (\cos\theta, \sin\theta)$  désigne le vecteur d'onde lié à  $\omega$  par la relation de dispersion,  $\bar{r}_i$  le vecteur position du capteur  $i$ ,  $j$  la racine carrée de -1 et  $T$  le signe de transposition. Pour un intervalle de fréquence  $d\omega$  donné centré sur  $\omega$ , la densité spectrale d'énergie  $S(\omega, \theta)$  est reliée à la matrice de corrélation  $C(\omega)$  par l'expression :

$$C(\omega) = \sum_{i=1}^N \bar{x}(\omega, \theta_i) \cdot \bar{x}^{*T}(\omega, \theta_i) \cdot S(\omega, \theta_i) \quad (2.2)$$

où les  $\theta_i$  représentent les directions de propagation des  $N$  composantes de houle à la fréquence  $\omega$ . L'estimation  $\tilde{S}(\omega, \theta)$  de la densité spectrale d'énergie autour de la pulsation  $\omega$  dans la direction  $\theta$  est alors obtenue :

$$\tilde{S}(\omega, \theta) = \frac{\kappa}{\bar{x}^{*T}(\omega, \theta) \cdot \tilde{C}^{-1}(\omega) \cdot \bar{x}(\omega, \theta)} \quad (2.3)$$

où  $\kappa$  désigne un coefficient de proportionnalité et  $\tilde{C}(\omega)$  l'estimation de la matrice de corrélation  $C(\omega)$  obtenue de la façon suivante :

$$\tilde{C}_{m,n}(\omega) = \frac{f_m(\omega) f_n^*(\omega)}{\left[ |f_m(\omega)| \right] \left[ |f_n(\omega)| \right]} \quad m, n = 1, \dots, M \quad (2.4)$$

Dans (2.4)  $f_m(\omega)$  désigne l'amplitude à la pulsation  $\omega$  de la transformée de Fourier du signal mesuré à la sonde  $m$  et  $*$  le symbole de conjugaison. Comme la matrice  $\tilde{C}(\omega)$  est hermitienne, la quantité  $\tilde{S}(\omega, \theta)$  est toujours strictement positive. La barre dans (2.4) signifie qu'une moyenne est effectuée comme pour toute estimation spectrale. Le calcul de  $\tilde{S}(\omega, \theta)$  grâce à (2.3) requiert préalablement l'inversion de la matrice  $\tilde{C}(\omega)$ . Il arrive parfois, en raison de

perturbations dues à un bruit de fond ou aux inévitables erreurs de mesure, que la matrice  $\tilde{C}(\omega)$  soit singulière. Capon (1969) suggère alors de perturber cette matrice de la façon suivante :

$$\tilde{C}'(\omega) = (1 - \varepsilon)\tilde{C}(\omega) + \varepsilon I \quad (2.5)$$

avec  $\varepsilon \ll 1$  et  $I$  la matrice identité.

### 2.3 Mise en oeuvre pratique

Pour l'étude des performances de la méthode MLM, le parti a été pris de synthétiser un champ de surface libre à partir de la superposition de trois houles d'Airy de fréquences et directions arbitraires et connues. Le réseau comporte six sondes disposées sur les sommets et au centre d'un pentagone. Cette géométrie est d'après Oakley et Lozow (1977) la mieux adaptée à l'estimation de spectres directionnels. Le signal obtenu à chaque sonde fait l'objet d'une FFT. A chaque pulsation  $\omega_i$ ,  $\tilde{C}(\omega_i)$  est calculée puis inversée. L'estimation spectrale  $\tilde{S}(\omega, \theta)$  est ensuite obtenue pour les valeurs de  $\theta$  souhaitées grâce à l'équation (2.3). La profondeur d'eau dans le bassin d'essai est fixée à 1.0m et l'intervalle de fréquences générées [0.4Hz, 2.0Hz]

### 2.4 Résultats

Dans un premier temps, trois ondes de fréquences et directions différentes sont synthétisées. Les figures 2.1 a-b montrent le spectre obtenu pour deux rayons  $R$  différents 0.2 m et 1 m. La résolution angulaire est meilleure avec  $R=1$  m et elle décroît avec la fréquence. En effet, lorsque la fréquence diminue, la longueur d'onde augmente et le rapport  $R/\lambda$  (ou  $kR$ ) diminue aussi. Les déphasages entre sondes au passage de la houle deviennent alors très faibles, ce qui a pour effet de diminuer le pouvoir de résolution de la méthode.

Supposons maintenant que les directions de propagation ne sont pas multiples du pas de calcul ici fixé à  $d\theta=10^\circ$ . La Figure 2.1c illustre le spectre obtenu avec  $R=1$  m. Les amplitudes de houle ne sont pas retrouvées ; seuls les résidus liés à la résolution angulaire apparaissent de part et d'autre des pics d'énergie. Cependant si le calcul est répété avec un pas  $d\theta$  plus fin, les amplitudes de houle spécifiées sont finalement obtenues. Si la fréquence d'une composante de houle ne correspond pas à un multiple de la résolution fréquentielle  $df$ , un étalement d'énergie se produit sur les fréquences voisines au dépens, bien entendu, de l'amplitude maximale du pic.

Supposons enfin qu'il y ait deux composantes de houle ayant la même fréquence comme dans le cas d'ondes incidentes et réfléchies. La Figure 2.1d illustre, pour  $R=1$  m, l'impossibilité à discerner clairement les deux directions de propagation en présence à 1.8Hz. Il apparaît donc que la méthode MLM est dans l'incapacité de distinguer la présence, à une fréquence donnée, de deux ou plusieurs ondes se propageant dans des directions différentes. Son application à la mesure de houles incidentes monochromatiques en milieu confiné est donc largement compromise.

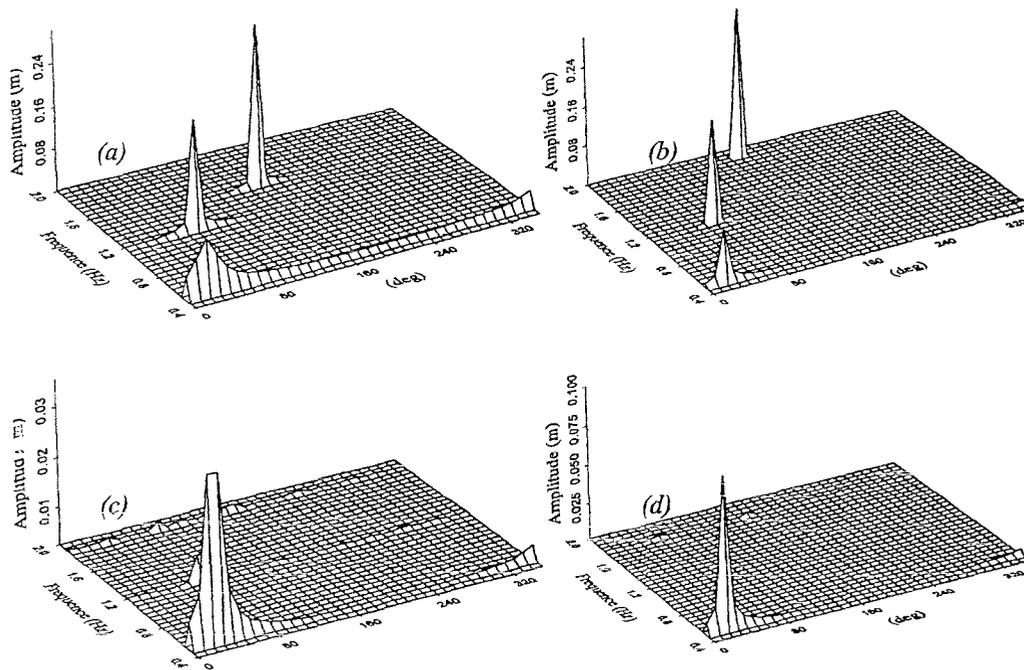


Figure 2.1a-d - Résultats obtenus avec la méthode MLM.

	Amplitudes (m)	Frequencies (Hz)	Directions(°)	R(m)
(a)	0.1, 0.2, 0.3	0.5, 1.2, 1.9	20, 70, 160	0.2
(b)	0.1, 0.2, 0.3	0.5, 1.2, 1.9	20, 70, 160	1.0
(c)	0.1, 0.2, 0.3	0.5, 1.2, 1.9	25, 75, 165	1.0
(d)	0.1, 0.2, 0.3	0.5, 1.8, 1.8	20, 70, 160	1.0

La résolution angulaire de la méthode MLM est analysée en calculant la demi-largeur de pic à mi-hauteur en fonction du paramètre  $R/\lambda$ . Les résultats obtenus pour  $R=0.2$  m et 1.0 m en faisant varier la fréquence de houle dans l'intervalle [0.4Hz , 2.0 Hz] sont représentés sur la figure 2.2 ci-dessous :

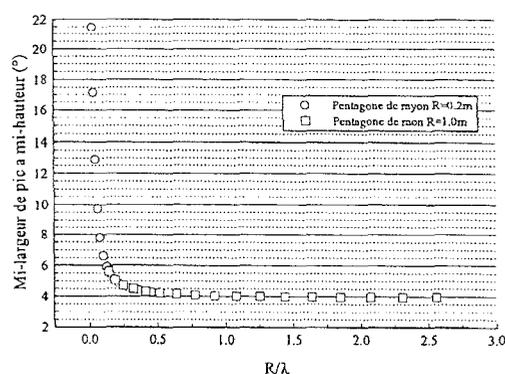


Figure 2.2 - Résolution angulaire de la méthode MLM

Le pouvoir de résolution augmente avec le ratio  $R/\lambda$  et atteint une valeur asymptotique voisine de  $4^\circ$ . Ce résultat est en accord avec Oakley et Lozow (1977). Ces résultats confirment, qu'en l'absence de bruit de fond, le réseau de rayon  $R=1\text{m}$  est plus performant que celui de rayon  $0.2\text{m}$ .

### 3. Méthode de Vraisemblance Maximale Modifiée (MMLM)

#### 3.1 Formulation

La méthode MMLM mise au point par Isobé et Kondo (1984) élargit le champ d'application de la MLM en prenant en compte l'existence d'un spectre de vague incident et d'un spectre de vague réfléchi. L'expression de la surface libre dans ce cas est donnée par :

$$\eta(\bar{x}, t) = \text{Re} \left[ \sum_{p=1}^p a_p \left\{ e^{j\bar{k}_p \cdot \bar{x}} + r_p e^{j\bar{k}_{p,r} \cdot \bar{x}} \right\} e^{-j\omega_p t} \right] \quad (3.1)$$

où  $a_p$  et  $r_p$  désignent respectivement l'amplitude et le coefficient de réflexion de la composante de houle  $p$ ,  $\bar{k}_p$  et  $\bar{k}_{p,r}$  les vecteurs d'onde incident et réfléchi liés à  $\omega_p$  par la relation de dispersion. Le vecteur formé des déphasages s'écrit maintenant :

$$\bar{x}(\omega, \theta) = \bar{X}_i(\omega, \theta) + r(\omega, \theta) \bar{X}_r(\omega, \theta) \quad (3.2a)$$

avec

$$\bar{X}_i(\omega, \theta) = \left[ e^{j\bar{k}_i \cdot \bar{r}_1}, e^{j\bar{k}_i \cdot \bar{r}_2}, \dots, e^{j\bar{k}_i \cdot \bar{r}_M} \right]^T \quad (3.2b)$$

et

$$\bar{X}_r(\omega, \theta) = \left[ e^{j\bar{k}_r \cdot \bar{r}_1}, e^{j\bar{k}_r \cdot \bar{r}_2}, \dots, e^{j\bar{k}_r \cdot \bar{r}_M} \right]^T \quad (3.2c)$$

où  $\bar{k} = \frac{2\pi}{\lambda} (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\bar{k}_r$  le vecteur d'onde de l'onde réfléchie et  $r(\omega, \theta)$  le coefficient de réflexion. La matrice de corrélation  $C(\omega)$  est toujours liée à  $\bar{x}(\omega, \theta)$  par (2.2). Pour tout couple  $(\omega, \theta)$ , le réel  $R_o$  suivant est calculé :

$$R_o(\omega, \theta) = - \frac{\bar{X}_r^{*T}(\omega, \theta) \cdot \tilde{C}^{-1}(\omega) \cdot \bar{X}_i(\omega, \theta) + \bar{X}_i^{*T}(\omega, \theta) \cdot \tilde{C}^{-1}(\omega) \cdot \bar{X}_r(\omega, \theta)}{2 \bar{X}_r^{*T}(\omega, \theta) \cdot \tilde{C}^{-1}(\omega) \cdot \bar{X}_r(\omega, \theta)} \quad (3.3)$$

Si  $R_o(\omega, \theta) \leq 0$ , l'estimée du spectre est donné par

$$\tilde{S}(\omega, \theta) = \frac{\kappa}{\bar{X}_i^{*T}(\omega, \theta) \cdot \tilde{C}^{-1}(\omega) \cdot \bar{X}_i(\omega, \theta)} \quad (3.4a)$$

Cette expression est identique à (2.3) pour la MLM. Si, par contre,  $R_o(\omega, \theta) > 0$  alors  $\tilde{S}(\omega, \theta)$  prend la forme suivante :

$$\tilde{S}(\omega, \theta) = \frac{\kappa}{\bar{X}_i^{*T}(\omega, \theta) \cdot \tilde{C}^{-1}(\omega) \cdot \bar{X}_i(\omega, \theta) - R_o^2 \bar{X}_r^{*T}(\omega, \theta) \cdot \tilde{C}^{-1}(\omega) \cdot \bar{X}_r(\omega, \theta)} \quad (3.4b)$$

le symbole  $\kappa$  dans (3.4a-b) représente un coefficient de proportionnalité homogène

à une densité d'énergie.

### 3.2 Mise en Oeuvre

Comme pour la MLM, un champ de houle a été synthétisé à partir de la superposition de plusieurs houles d'Airy aux caractéristiques connues. Le réseau de sondes est toujours pentagonal. Son rayon est fixé à 1m. L'obstacle réfléchissant est supposé perpendiculaire à l'axe longitudinal du bassin.

### 3.3 Résultats

#### 3.3.1 Performances

Figure 3.1.a illustre les performances de la méthode MMLM quand il existe, à une fréquence donnée, une onde incidente est réfléchi par l'obstacle mentionné précédemment. Les deux pics d'énergie sont parfaitement retrouvés. L'influence de l'angle d'incidence est ensuite étudiée avec les cas incidences rasante et quasi-normale respectivement illustrés sur les Figures 3.1.b et c. La méthode MMLM donne les pics escomptés.

#### 3.3.2 Limitations

En revanche, la méthode MMLM est incapable de "deviner" l'inclinaison de l'obstacle, la direction du vecteur d'onde réfléchi  $\vec{k}_r$ , étant fixée à une fréquence donnée par l'utilisateur lors du calcul de  $\vec{X}_r(\omega, \theta)$  (eq. (3.3.c)). La figure 3.2.a illustre cette limitation avec l'impossibilité de discerner les pics incident et réfléchi spécifiés. La présence éventuelle d'une seconde réflexion (sur la paroi longitudinale du bassin par exemple) entraîne, elle aussi, la détérioration complète de la méthode MMLM comme en témoigne la Figure 3.2.b.

#### 3.3.3 Interprétation de $R_o(\omega, \theta)$

Si  $\theta_i$  et  $\theta_r$  sont les directions de l'onde incidente et de l'onde réfléchi par l'obstacle pour une fréquence donnée, la formule suivante est obtenue simplement à partir des équations (3.2.b-c) et (3.4.b) :

$$S(\omega, \theta_i)R_o(\omega, \theta_i) = S(\omega, \theta_r)R_o(\omega, \theta_r) \quad (3.5)$$

La formule précédente montre que le coefficient de réflexion  $r(\omega, \theta)$  peut être obtenu directement à partir des valeurs de  $R_o$  sans passer par le calcul des amplitudes respectives des deux ondes en présence :

$$r(\omega, \theta_i) = \sqrt{\frac{R_o(\omega, \theta_i)}{R_o(\omega, \theta_r)}} \quad (3.6)$$

$R_o(\omega, \theta)$ , qui est sans dimension, serait donc assimilable à une fonction de répartition de l'énergie contenue à la fréquence  $\omega$  entre les ondes incidente et réfléchi.

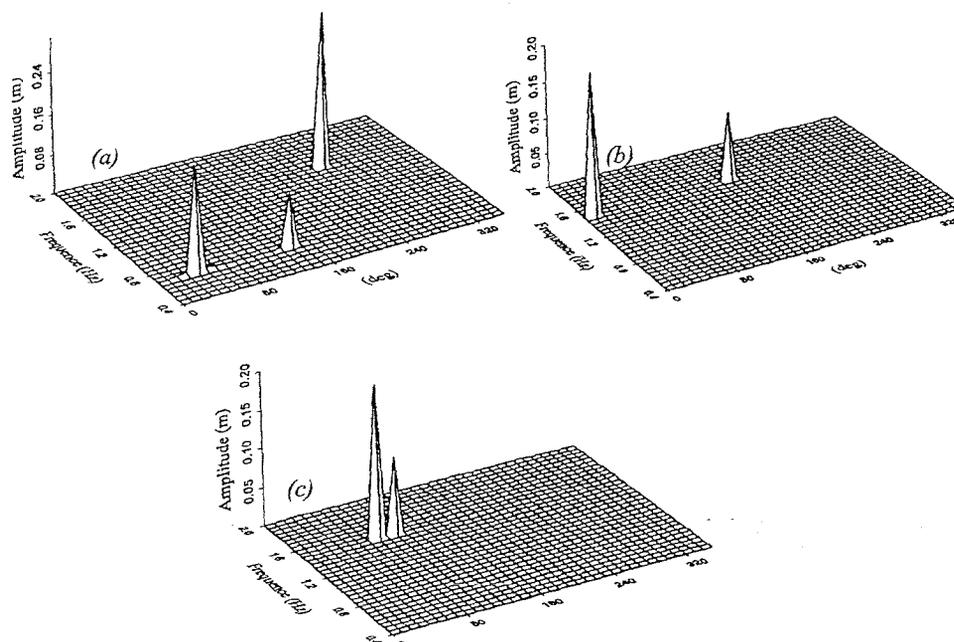


Figure 3.1.a-c - Performances de la méthode MMLM (R=1.0m).

	Amplitudes (m)	Frequences (Hz)	Directions(°)
(a)	0.1, 0.2, 0.3	0.7, 0.7, 1.5	140, 40, 250
(b)	0.1, 0.2	1.5	170, 10
(c)	0.1, 0.2	1.5	100, 80

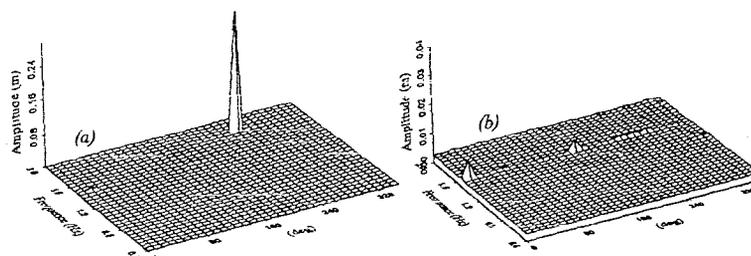


Figure 3.2.a-b. - Limitations de la méthode MMLM (R=1.0m).

	Amplitudes (m)	Frequences (Hz)	Directions(°)
(a)	0.1, 0.2, 0.3	1.5, 1.5, 1.8	170, 20, 250
(b)	0.3, 0.2, 0.1	1.5	10, 170, 190

#### 4. Conclusions

Deux méthodes de vraisemblance maximale MLM et MMLM sont étudiées à partir de signaux limnimétriques synthétiques issus de la superposition de plusieurs houles d'Airy. La première méthode donne d'excellents résultats tant que toute l'énergie contenue à une fréquence se propage dans une direction unique ce qui exclut la possibilité de réflexions dans le bassin. La présence de bruit détériore cependant quelque peu ces performances d'après Oakley *et al* (1977).

La méthode précédente est modifiée de façon à traiter le cas d'une et une seule réflexion. L'utilisation doit spécifier l'orientation de l'obstacle causant la réflexion, la méthode MMLM n'étant pas à même de la "deviner". Les résultats en houle monochromatique sont probants. En revanche, la méthode n'est plus valable lorsque de multiples réflexions se produisent.

Il serait utile de poursuivre les investigations présentées dans les directions suivantes :

- l'analyse détaillée de l'importance des détériorations de performance causées par la présence d'un bruit de fond.
- généralisation de la méthode MMLM à deux réflexions (il est probable qu'après deux réflexions, la composante de houle obtenue a une amplitude négligeable).
- généralisation de la méthode de façon à ne pas devoir spécifier la direction de l'obstacle dans le bassin.
- analyse des performances dans le cas de spectres (fréquentiels et directionnels) de houle incident et réfléchi.

#### 5 Références

- CAPON, J (1969) : High-resolution frequency-wave-number spectrum analysis. *Proc. IEEE*, 57, pp. 1408-1418.
- GODA, Y. et SUZUKI, Y. (1976) : Estimation of incident and reflected waves in random wave experiments. *Proc. 15<sup>th</sup> Coastal Eng. Conf., ASCE*, pp. 828-845.
- ISAACSON, M. (1991) : Measurement of regular wave reflection. *Journal of Water., Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol 117, n°6.
- ISOBE, M., KONDO, K. (1984) : Method for estimating directional wave spectrum in incident and reflected wave field. *Proc. Coastal Eng. Conf.* pp. 467-483.
- ISOBE, M., KONDO, K., and HORIKAWA, H. (1984) : Extension of MLM for estimating directional wave spectrum. *Proc. Symp. on Description and Modelling of Directional Seas, Lyngby, Denmark, Tech. University, A6, 1-15.*
- JEFFERYS, E.R., WATEHAM, G.T., RAMSDEN, M.A., et al. (1981) : Measuring directional spectra with the MLM. *Proc. Directional Wave Spectra App. Conf., University of Berkeley, CA.*, pp. 203-219.
- MANSARD, E.P.D., FUNKE, E.R. (1980) : The measurement of incident and reflected spectra using a least squares method. *Proc. 17<sup>th</sup> Coastal Eng. Conf., Sydney*, pp. 1-19.
- OAKLEY, O.H., LOZOW, J.B. (1977) : Directional spectra measurements by small arrays. *Offshore Technology Conference. OTC. 2745.*