



LECTURE SPÉCIALE

L'analyse harmonique de la concentration de sédiment en suspension dans les modèles unidimensionnels

Ken George

Principal Lecturer in Ocean Science, Institute of Marine Studies, University of Plymouth, Royaume Uni

Philippe Gleizon

Post-doctoral Research Fellow, Institute of Marine Studies, University of Plymouth, Royaume Uni

Résumé

Le transport du sédiment suspendu dans les estuaires de grand marnage est étudié à l'aide de deux modèles unidimensionnels schématisés. L'analyse harmonique montre que la variation semi-mensuelle domine les fluctuations de concentration, et que les variations quart-diurnes sont plus importantes pour la concentration que pour la hauteur de marée. Toutefois, ces modèles semblent impropres à représenter fidèlement le transport de sédiment dans un estuaire réel, et il est nécessaire de mener une étude semblable avec des modèles non-intégrés latéralement.

1. Introduction

Laplace a conçu la méthode harmonique pour l'analyse et la prédiction des marées, dont le principe est le suivant: chaque courbe de marée peut être analysée comme la somme d'un grand nombre de courbes composantes de forme sinusoïdale. La méthode n'a été mise au point en forme pratique que dans les années vingt de ce siècle [1], mais elle est actuellement utilisée pour la prédiction des hauteurs de marée pour presque tous les ports de référence dans le monde.

De même que les hauteurs de marée, les variables associées avec la marée sont également susceptibles d'une analyse harmonique. Elles incluent les courants de marée et, objet de cet article, les concentrations de sédiment suspendu.

Dyer et Evans [2] ont créé un modèle schématisé d'un canal de longueur $l = 100$ km, de largeur constante et de profondeur variant linéairement de 20 m à l'embouchure à 5 m à l'extrémité amont. Une marée semi-diurne sinusoïdale est imposée à l'embouchure. Ce modèle, référencé par EME, représente grossièrement un estuaire de grand marnage. Les auteurs firent une analyse harmonique simple, et expliquèrent la présence de turbidité maximale par l'assymétrie flot-jusant des marées.

La présente étude est une extension de celle de Dyer et Evans, pour tenir compte des variations semi-mensuelles, suivi de recherches sur un modèle plus proche d'un estuaire réel.

2. Modèles schématiques

Un estuaire de grand marnage (2 m de marnage en moyenne) peut être considéré comme bien mélangé latéralement et verticalement. L'estuaire peut donc être représenté par un modèle unidimensionnel. Les équations générales de l'hydrodynamique pour un canal rectangulaire sont bien connues:

$$\text{Equation de continuité: } \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \{b(h + \zeta)U\}}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

avec:

$\zeta(x,t)$	hauteur de la marée au-dessus du niveau moyen à l'embouchure,
$U(x,t)$	vitesse moyenne axiale sur la section considérée,
$h(x)$	profondeur du fond au-dessous du niveau moyen à l'embouchure,
$b(x)$	largeur du canal,
x	distance par rapport à l'embouchure vers l'amont,
t	temps

Equation de quantité de mouvement:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - C_d \frac{U|U|}{(h + \zeta)} + \frac{1}{(h + \zeta)} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ K_x (h + \zeta) \frac{\partial U}{\partial x} \right\} \quad (2)$$

avec:

g	accélération de la pesanteur = 9,81 m/s ² ;
C_d	coefficient de frottement = 0,0025
K_x	coefficients de dispersion turbulente axiale pour la vitesse;

Leurs solutions assez précises pour un estuaire réel ont été établies depuis trente ans [3].

Contrairement au cas de la dynamique de l'eau, la dynamique du sédiment suspendu n'est pas bien comprise, et le sujet est caractérisé par des formules empiriques. Le transport de sédiment peut être modélisé par l'équation d'advection-diffusion:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{b(h + \zeta)} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ E_x b(h + \zeta) \frac{\partial C}{\partial x} \right\} + \frac{S}{(h + \zeta)} \quad (3)$$

avec:

$C(x,t)$	concentration de sédiment (kg/m ³ = g/l),
E_x	coefficient de dispersion turbulente axiale pour la concentration.

En première approximation, K_x et E_x sont pris constants, identiques et égaux à 100 m²/s; $S(x,t)$ est un terme de production nette de sédiment, dû à l'interaction entre la veine d'eau et le lit:

$$S = \frac{\partial m_E}{\partial t} - \frac{\partial m_D}{\partial t} \quad (4)$$

si m_E et m_D sont respectivement les masses de sédiments produits par érosion, et "évacués" de la colonne d'eau par déposition. Dans le cadre d'un modèle intégré verticalement, il est correct de considérer que le taux d'érosion est proportionnel à la contrainte de cisaillement sur le fond, τ_b :

$$\frac{\partial m_E}{\partial t} = M(\tau_b - \tau_c) \quad (5)$$

où τ_c est la contrainte de cisaillement critique pour érosion et M la constante de taux d'érosion.

Pour nos modèles, nous avons considéré les valeurs utilisées par Sheng et Lick [4], déterminées pour un mélange d'argile et de vase:

$$\frac{\partial m_E}{\partial t} = \begin{cases} 0 & ; \tau_b < 0.05 \text{ Nm}^{-2} \\ 1.33 \cdot 10^{-4} (\tau_b - 0.05) & ; 0.05 \text{ Nm}^{-2} \leq \tau_b < 0.2 \text{ Nm}^{-2} \\ 4.12 \cdot 10^{-4} (\tau_b - 0.1515) & ; 0.2 \text{ Nm}^{-2} \leq \tau_b \end{cases} \quad (6)$$

Pour la déposition, nous avons pris les formules données par Mehta [5]:

$$\frac{\partial m_D}{\partial t} = \begin{cases} 0 & ; \tau_b > \tau_d \\ C w_s (1 - \tau_b / \tau_d) & ; \tau_b \leq \tau_d \end{cases} \quad (7)$$

avec:

τ_d contrainte de cisaillement critique pour déposition = 0.06 Nm^{-2} .

La vitesse de chute w_s dépend du type de sédiment considéré et de sa concentration par la loi empirique:

$$w_s = \begin{cases} \alpha_1 C^\beta & ; C \leq C_h \\ \alpha_2 (1 - \alpha_3 C)^\gamma & ; C > C_h \end{cases} \quad (8)$$

où C_h est la concentration critique pour déposition; et, selon Mehta, $\alpha_1 = 0.513$, $\alpha_2 = 1.3$, $\alpha_3 = 0.008$, $\beta = 1.29$, $\gamma = 5$ et $C_h = 3.5 \text{ g/l}$.

Les équations sont résolues en utilisant un schéma aux différences finies, explicite, discrétisé sur un maillage entrelacé. Les vitesses et profondeurs sont déterminées à une section x , tandis que les concentrations et élévations le sont à une section intermédiaire $x + \Delta x / 2$. Initialement, les vitesses et élévations sont nulles, $u(x,0) = 0$ et $\zeta(x,0) = 0$, et la concentration varie linéairement suivant x , de 0 g/l à l'embouchure ($x = 0$) à 5 g/l à l'extrémité amont ($x = 1$).

À l'embouchure, la hauteur de l'eau est donnée par:

$$\zeta(0,t) = \sum_i A_i \cos(\sigma_i t - \varepsilon_i) \quad (9)$$

où A_i , σ_i et ε_i sont respectivement les amplitudes, fréquences et phases des composantes de la marée. Pour une variation semi-mensuelle, nous ne considérerons que les deux composantes M_2 et S_2 . L'équation de continuité fournit l'expression de la vitesse à cette limite, et la concentration est prise constante et égale à zéro. Les conditions à la limite amont ($x = 1$) permettent de prendre en compte le régime et l'apport de sédiments par la rivière. Le modèle EME a un maillage avec un pas de grille de $\Delta x = 1 \text{ km}$.

Nous avons construit un modèle qui représente plus fidèlement un estuaire de taille moyenne (par exemple, celui de la Tamise ou du Humber). En gardant le canal rectangulaire, le niveau du fond varie linéairement de -15 m à l'embouchure à +5 m à l'extrémité amont. Ce modèle, qui est référencé par F1D, a un pas de grille plus fin (400 m), ce qui donne 250 compartiments le long de l'estuaire, même si les vingt derniers sont au-delà de la limite des marées.

3. Analyses harmoniques

Après dix cycles d'entraînement, les deux modèles ont été exécutés sur deux périodes semi-mensuelles (2 x 29 cycles de marée semi-diurne), et les données, en groupes de 256 valeurs pour une de ces périodes, ont été traitées par une analyse harmonique, à l'aide d'un algorithme de Transformée de Fourier Rapide. Les composantes harmoniques principales et leurs fréquences approximatives en degrés par heure solaire sont les suivantes:

longue-période	Z_0	0	SM_0	1	(aussi appelée MSf)
semi-diurnes	M_2	29	S_2	30	
quart-diurnes	M_4	58	MS_4	59	

Les figures 2 à 5 montrent les résultats du modèle EME pour les points à 30 km et à 70 km de l'embouchure, dans le domaine temporel à gauche et dans le domaine spectral à droite. La périodicité de l'élévation (figures 2a et 4a) y est essentiellement semi-diurnale. L'étude spectrale montre que, pour ces deux endroits, les composantes dominantes pour l'élévation restent M_2 et S_2 . Il en est de même pour la vitesse (non-illustrée). Les spectres montrent pourtant la présence dans l'élévation d'ondes de longue-période et quart-diurnes. Ne se trouvant pas dans la marée imposée à l'embouchure, elles se développent nécessairement dans l'estuaire à cause des faibles profondeurs.

En revanche, pour la concentration de sédiment, les quart-diurnes sont presque aussi fortes que les semi-diurnes (figures 3b et 5b), ce qui est évident aussi dans la figure 5a. On peut trouver l'explication dans le terme $S(x,t)$; l'érosion a lieu deux fois par cycle semi-diurne, pendant le flot et le jusant, de même la déposition, pendant les périodes de faibles vitesses. Lorsqu'on regarde les tracés de concentration de sédiment (figures 3a et 5a), on est frappé par la variation bimensuelle, caractérisée par la composante SM_0 . Cette variation est attribuée au fait que les vitesses à vive-eau sont plus grandes que celles à morte-eau.

Les figures 1a et 1b comparent la variation avec la distance des composantes principales de la concentration. Dans le modèle EME, le bouchon de vase se trouve à $x/l = 0,5$, comme le montre la courbe de concentration moyenne (Z_0); au même endroit, l'amplitude de M_2 atteint un minimum. Dans le modèle F1D, le maximum de turbidité s'est déplacé vers l'amont, jusqu'à $x = 70$ km. Ces figures montrent clairement que le taux global de sédiment en suspension est deux fois plus grand dans le modèle EME que dans F1D. Le taux de sédiment dans EME est atteint après dix cycles de marée, selon les conditions imposées dans le modèle. L'épaisseur du sédiment sur le lit du canal est effectivement infinie.

Mais dans le modèle F1D, une source quasi-infinie de sédiment menait à des concentrations beaucoup trop élevées. Il nous a fallu pondérer le taux d'érosion par le rapport $b(x)/b(0)$, pour que les concentrations prennent une valeur raisonnable.

Les résultats pour le modèle F1D sont présentés dans les figures 6 à 10. Les figures 6a et 6b, pour $x = 30$ km, montrent une variation classique de hauteur de marée pendant deux cycles semi-mensuels. La variation de la concentration à la même distance (figures 7a et 7b) est dominée par l'onde SM_0 : la concentration moyenne, et l'amplitude des fluctuations semi-diurnes, sont plus grandes à vive-eau qu'à morte-eau. À $x = 70$ km, le fond du canal se trouve à 1 m au-dessous du zéro; la profondeur ici est donc beaucoup moindre que dans le modèle EME. Son effet sur la marée est de redistribuer l'énergie dans les harmoniques de haute fréquence; ce phénomène a été étudié dans la nature [6]. Les marées à basse-mer atteignent quasiment le même niveau (figure 8a). Le niveau moyen semi-diurne varie avec une périodicité de deux semaines; c'est-à-dire que l'onde SM_0 est importante, même pour l'élévation (figure 8b). La figure 9a montre que la différence entre vive-eau et morte-eau est réduite pour le maximum de jusant. Finalement, la concentration (figures 10a et 10b) est toujours dominée par la variation semi-mensuelle, mais ici à $x/l = 0,7$ l'amplitude semi-diurne est plus grande à morte-eau qu'à vive-eau.

4. Discussion

Ces études ont confirmé l'importance des ondes quart-diurnes dans le spectre de la concentration, et révélé celle de la composante semi-mensuelle SM_0 . Ainsi peuvent-elles être regardées comme une extension du travail de Dyer et Evans. Aussi avons-nous adapté leur méthodologie à un modèle qui ressemble davantage à un vrai estuaire. En réfléchissant, la supposition d'un chenal rectangulaire nous semble déraisonnable. En effet, dans un estuaire réel, les variations latérales de profondeur et de vitesse des courants ne peuvent être négligées. Quoique ces variations importent peu pour la modélisation de la dynamique de l'eau, pour la dynamique du sédiment elles deviennent critiques. Moyenner les vitesses U sur une coupe transversale est suffisant pour modéliser l'hydrodynamique, mais est inapproprié pour le sédiment. La dynamique du sédiment ne dépend pas de U , mais plutôt de $(U-U_c)^2$, (ou U_c signifie une vitesse critique), une fonction qui est cruellement non-linéaire. Pour en tenir compte on devrait évaluer cette fonction pour chaque élément de l'estuaire. Le problème nécessite un modèle dans lequel on tient compte du changement latéral de la profondeur. Tous ces arguments nous amènent à reconsidérer l'utilité d'un modèle unidimensionnel pour étudier le sédiment. Alors, dans le futur, nous développerons la modélisation en deux dimensions, pour laquelle l'*Institute of Marine Studies* a déjà une solide expérience [7].

5. Conclusions

Deux modèles unidimensionnels d'un canal schématisant un estuaire gouverné par des marées semi-diurnes, montrent que:

- (a) Les ondes quart-diurnes M_4 et MS_4 sont plus importantes dans le spectre de la concentration de sédiment que dans ceux de l'élévation ou la vitesse de la marée; ceci est dû à la resuspension pendant le flot et le jusant, et à la déposition pendant les périodes de vitesse faible.
- (b) La variation temporelle de la concentration est marquée par l'onde semi-mensuelle SM_0 , qui domine à cause de la grande différence entre l'effet des courants de marée à vive-eau et à morte-eau.
- (c) Bien que la modélisation une dimension donne un aperçu de la dynamique du sédiment suspendu dans un estuaire, il est nécessaire de développer des modèles à deux (voire trois) dimensions afin de mieux appréhender les processus.

6. Références

- [1] Doodson, A.T. "The analysis of tidal observations". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **A227**, 223-279, 1927.
- [2] Dyer K.R. et Evans E.M. "Dynamics of turbidity maximum in a homogeneous tidal channel". *Journal of Coastal Research*, **Special issue no.5**, 23-30, 1989.
- [3] Rossiter, J.R. et Lennon, G.W. "The computation of tides in the Thames estuary using the initial value method" *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, **31**, 25-56, 1965.
- [4] Sheng Y.P. et Lick W. "The transport and resuspension of sediments in a shallow lake". *Journal of Geophysical Research*, **84**, 1809-1826, 1979
- [5] Mehta A.J. "On estuarine cohesive sediment suspension behavior" *Journal of Geophysical Research*, **94**, 14303-14314, 1989.
- [6] George K.J. et Simon B. "La méthode de concordances par espèce de prédiction de marée dans les estuaires". *Revue Hydrographique Internationale*, **51**, 129-152, 1984
- [7] George, K.J. et Stripling, S. "Improving wetting and drying in a two-dimensional tidal numerical model". *Applied Mathematical Modelling*, **19**, 2-6.

Figure 1a : EME : Concentration

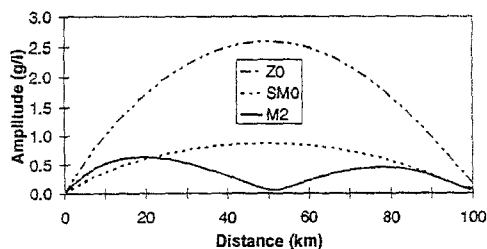


Figure 1b : F1D : Concentration

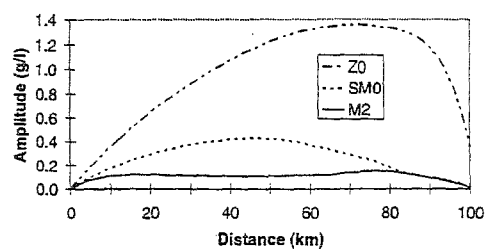


Fig 2a : EME : x = 30 km : MAREES

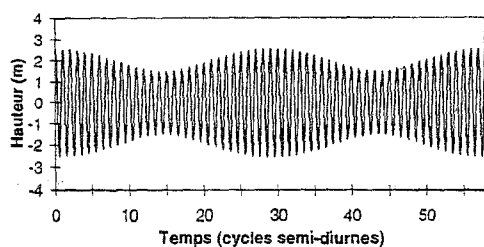


Fig 2b : EME : x = 30 km : MAREES

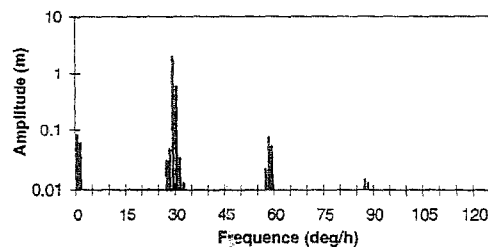


Fig 3a : EME : x = 30 km : SEDIMENT

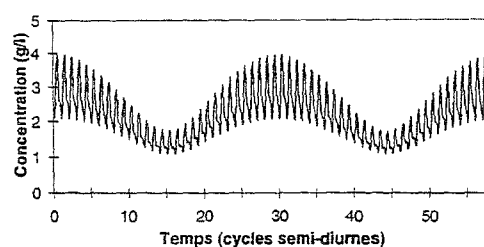


Fig 3b : EME : x = 30 km : SEDIMENT

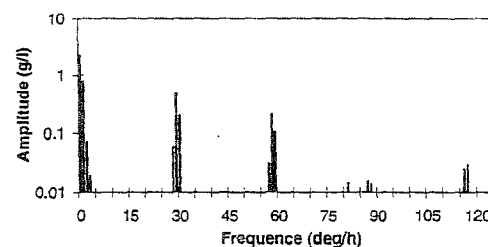


Fig 4a : EME : x = 70 km : MAREES

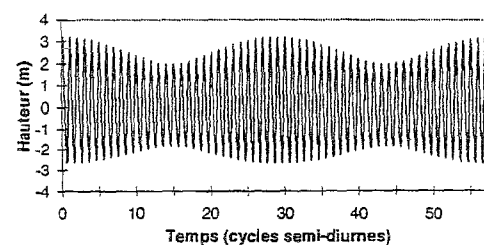


Fig 4b : EME : x = 70 km : MAREES

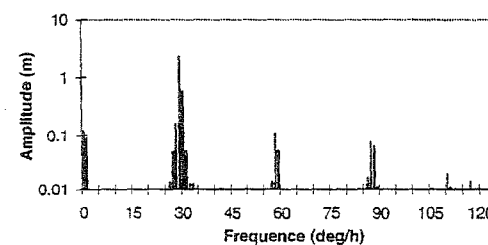


Fig 5a : EME : x = 70 km : SEDIMENT

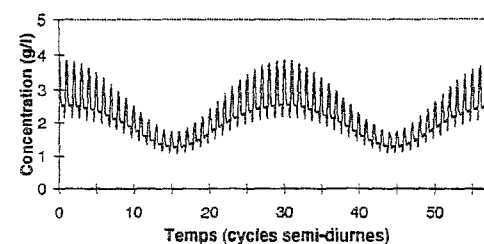


Fig 5b : EME : x = 70 km : SEDIMENT

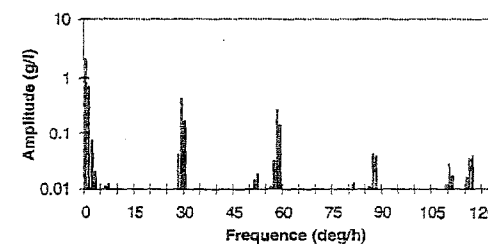


Fig 6a : F1D : x = 30 km : MAREES

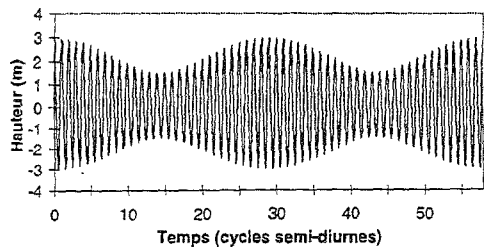


Fig 6b : F1D : x = 30 km : MAREES

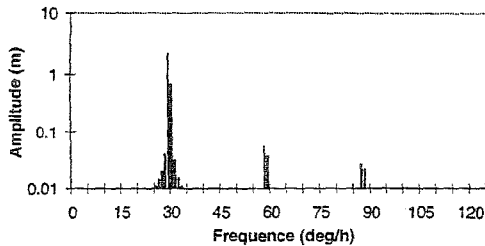


Fig 7a : F1D : x = 30 km : SEDIMENT

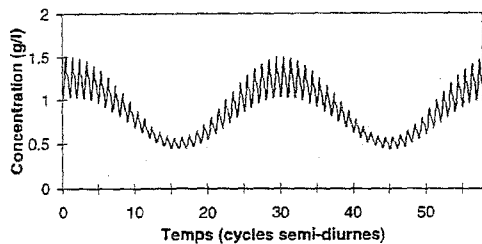


Fig 7b : F1D : x = 30 km : SEDIMENT

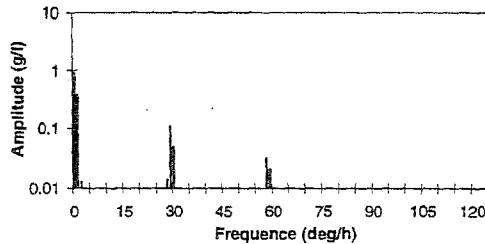


Fig 8a : F1D : x = 70 km : MAREES

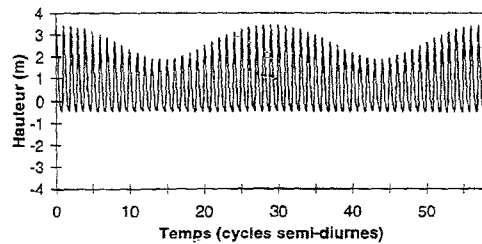


Fig 8b : F1D : x = 70 km : MAREES

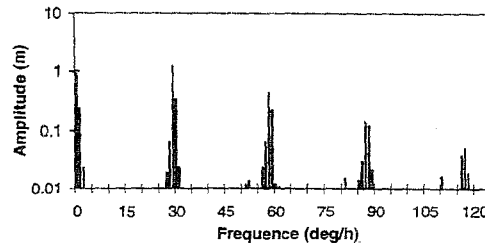


Fig 9a : F1D : x = 70 km : COURANTS

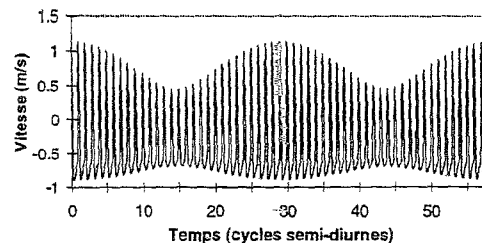


Fig 9b : F1D : x = 70 km : COURANTS

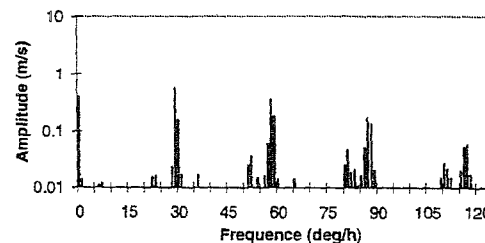


Fig 10a : F1D : x = 70 km : SEDIMENT

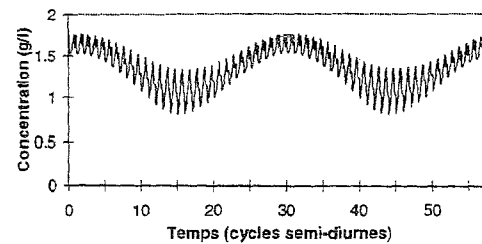


Fig 10b : F1D : x = 70 km : SEDIMENT

