



MODÉLISATION INTÉGRÉE EAU/SÉDIMENT: UNE NOUVELLE TENDANCE ? DÉVELOPPEMENT AUTOUR D'UN MODÈLE UNIDIMENSIONNEL VERTICAL

P. LE HIR et Ph. CUGIER (*)

IFREMER Centre de Brest, B.P. 70 - 29280 Plouzané, France

* DEA Sciences de l'Environnement Marin, Université d'Aix-Marseille 2.

Abstract

In cohesive sediment dynamics, a new trend of modelling consists of computing the particle distribution and velocities from the water surface until dense layers of sediment, the water column and surficial sediment being considered as a whole. Thus the deposition and erosion rates at the "interface" become internal vertical fluxes of material. To illustrate this, a one-dimensional vertical model has been written according to the formalism of multi-phase dynamics, but with several simplifying assumptions among them : vertical acceleration are neglected and all phases have the same horizontal velocity. The sediment behaviour (permeability, effective stress, rheological properties) can be specified within the multiphase frame.

Applications are given for hydrodynamics or sediment dynamics as well. The model proves to be able to simulate the velocity profile in the wave boundary layer, as measured in a laboratory flume. Then the model is used to compute the vertical distribution of low density particles (e.g. flocs) with the formation of a fluid mud layer. The effect of turbulence damping in stratified areas and of viscosity increase in concentrated ones are pointed out.

1. INTRODUCTION

Dans le domaine de la dynamique des sédiments fins (cohésifs), la démarche classique de modélisation consiste à "transporter" les particules dans la masse d'eau à l'aide d'un modèle d'advection-dispersion couplé à un modèle hydraulique, et à gérer séparément le fond sédimentaire, à l'aide d'un modèle préservant le bilan de masse global et prenant en compte les processus de tassement. Une nouvelle tendance consiste à intégrer les approches relevant de l'hydrodynamique et de la mécanique des sols en considérant la colonne eau/sédiment comme un milieu semi-continu plus ou moins chargé en particules. Dans ce cas les flux de dépôt ou d'érosion à l'"interface eau/sédiment" deviennent des échanges verticaux internes au calcul. Cette approche doit permettre de mieux reproduire la continuité des profils de concentration observés, avec ou sans lutocline (Kirby, 1988), ainsi que l'effet des fortes charges en particules sur le profil de vitesse, en tenant compte de l'amortissement de la turbulence. Ainsi récemment, Teisson *et al.* (1992) ont pu simuler à l'aide d'un modèle diphasique la constitution d'une "crème de vase" et sa remise en suspension par un accroissement de courant.

Dans cet esprit, et dans le cadre du Programme National d'Océanographie Côtière, nous avons développé un code de calcul unidimensionnel vertical (1DV) susceptible de

traiter les processus selon la verticale relevant de domaines aussi variés que l'hydrodynamique, la sédimentologie, la chimie et la biologie, et si possible le couplage entre ces processus.

2. DESCRIPTION DU MODELE

2.1 Principales hypothèses

Afin de ne pas nuire à la généralité du modèle, nous avons adopté une approche multiphasique qui permet de prendre en compte les interactions entre particules et fluide, par exemple les processus de floculation/défloculation ou même la chute entravée et la consolidation dans un sédiment en formation. Les phases dont on cherche à connaître la dynamique sont une phase continue, le fluide (ici, l'eau), et des phases dispersées, les particules : par exemple, des particules de tailles ou de densités différentes peuvent constituer des phases identifiées. On considérera cependant un milieu saturé, excluant ainsi toute phase gazeuse. Chaque phase est localement caractérisée par sa vitesse et sa concentration formulée en fraction volumique : cette variable, qui représente le taux de présence de la phase (Viollet et Simonin, 1992), est plus appropriée que la concentration massique lorsque les interactions entre phases sont prises en considération (par exemple dans un phénomène de chute entravée). S'agissant des variables d'état biochimiques, elles peuvent constituer des phases supplémentaires (par exemple, le phytoplancton) ou être "attachées" à la phase fluide (variable dissoute) ou à une phase particulaire (bactérie "liée", contaminant adsorbé ...) : dans ce cas, elles ont les mêmes vitesses que leurs phases "support" et seules des équations de conservation de masse sont à résoudre.

Par ailleurs, le modèle devant à la fois être un outil de recherche sur les processus et un code simple pouvant être implanté sur petit ordinateur (type "PC"), la formulation unidimensionnelle verticale a été retenue. Selon cette hypothèse restrictive, les gradients horizontaux de toute quantité sont soit nuls, soit imposés. En pratique, seuls les gradients horizontaux de pression sont retenus, car ils constituent le principal forçage hydrodynamique. En fait le modèle ne sera donc pertinent que dans le cas d'une mer ouverte où les profils de vitesse ou de concentration présentent une uniformité horizontale, ou dans le cas d'une colonne d'eau "fermée" (par exemple, une colonne à sédimentation de laboratoire). Pour des raisons de continuité, l'exclusion de gradients horizontaux de vitesse empêche la prise en compte de variations de la surface libre. Pratiquement le modèle devra être appliqué aux cas où ces variations sont faibles, et donc négligeables devant la hauteur d'eau : il

s'agit naturellement d'une limitation importante du modèle.

Les autres hypothèses fondamentales, a priori compatibles avec les écoulements naturels que l'on considère, sont les suivantes :

* L'eau et les particules ont les mêmes composantes horizontales de vitesse. Les écoulements d'eau interstitielle dans une vase soumise à un gradient piézométrique, comme il en existe probablement sur les estrans, constituent une exception notable.

* Les termes d'accélération et d'inertie (accélération spatiale) concernant les vitesses verticales peuvent être négligés.

* Toutes les phases sont incompressibles :

$$\forall k, \rho_k = \text{Cte}$$

cette hypothèse pourrait être reconsidérée dans le cadre d'une modélisation de la floculation.

* On suppose que les taux de transfert de quantité de mouvement entre fluide et particules sont induits par leurs mouvements relatifs (donc seulement selon la verticale), et se réduisent aux forces de traînée, négligeant ainsi les forces de Basset, de portance et de masse ajoutée.

2.2 Système d'équations

L'ensemble des hypothèses précédentes permet de simplifier le système d'équations relatif à un écoulement multiphasique, à savoir une équation de conservation de masse et une équation de conservation de la quantité de mouvement pour chaque phase (Teisson *et al.*, 1992). Après quelques développements algébriques faisant intervenir les bilans globaux de masse ou de quantité de mouvement, Cugier (1993) obtient le système suivant :

- pour chaque phase particulière, une équation de conservation de masse :

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_k + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_k w_k) = \frac{\Gamma_k}{\rho_k} \quad (1)$$

où Γ_k désigne le taux de transfert de masse interfacial entre la phase k et les autres. Ce terme souvent nul peut représenter une absorption d'eau par des particules, ou plus généralement des échanges entre classes de particules dans les processus de floculation.

- 2 équations pour la conservation de la quantité de mouvement horizontal :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \sum_1 \alpha_1 \rho_1 w_1 \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[\sum_1 (\alpha_1 \rho_1 \overline{u_1' w_1'} + T_1^{zz}) \right] + fV \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \sum_1 \alpha_1 \rho_1 w_1 \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[\sum_1 (\alpha_1 \rho_1 \overline{v_1' w_1'} + T_1^{yz}) \right] + fU \quad (3)$$

$$\text{avec } \rho = \sum_1 \alpha_1 \rho_1 \quad (\text{et } \sum_1 \alpha_1 = 1)$$

- une équation d'équilibre dynamique vertical pour chaque phase particulière :

$$F_k = \underbrace{(\rho - \rho_k)g}_{\text{force de traînée}} + \underbrace{\left(\sum_1 \Gamma_1 w_1 - \frac{\Gamma_k w_k}{\alpha_k} \right)}_{\text{effet des échanges de masse}} + \frac{\partial}{\partial z} \sum_1 (\alpha_1 \rho_1 \overline{w_1'^2} + T_1^{zz}) - \frac{1}{\alpha_k} \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_k \rho_k \overline{w_k'^2} + T_k^{zz}) \quad (4)$$

Dans les équations (2) à (4), $\overline{\rho_{ik} u_{jk}}$ représente une contrainte turbulente (tension de Reynolds pour la phase fluide), $T_{k=f}^{ij}$ est la contrainte moléculaire visqueuse dans le fluide et $T_{k \neq f}^{ij}$ représente une contrainte de contact entre particules.

La force de traînée F_k s'exprime en fonction de W_{relk} , la vitesse relative entre la phase k et le fluide, du diamètre moyen des particules de la phase k et de la concentration volumique du fluide (cf. Annexe). Ainsi les phénomènes de chute entravée, lorsque les particules sont abondantes, sont-ils pris en compte.

- si l'on admet que les limites supérieure et inférieure du domaine considéré sont fixes, la conservation de la masse du mélange permet de calculer la vitesse verticale du fluide :

$$w_f = -\frac{1}{\alpha_f} \sum_{k \neq f} \alpha_k w_k \quad (5)$$

où l'indice f est réservé à la phase fluide.

Le système d'équations (1) à (4) nécessite une fermeture pour les termes turbulents et entre les vitesses verticales W et W_{rel} de chaque phase. En effet la vitesse W_{rel} , introduite dans le terme de traînée, représente une vitesse relative moyenne de la phase dispersée par rapport au fluide. On peut écrire :

$$W_{relk} = W_k - W_f - W_dk \quad (6)$$

où W_d est une vitesse de dispersion que Viollet et Simonin (1992) définissent comme l'écart entre la vitesse moyenne des particules de la phase k et celle qu'aurait le fluide à leur place. Cette différence provient d'une corrélation entre la distribution des particules et le mouvement turbulent dont la moyenne, pondérée par la présence de particules, est dirigée dans le sens inverse du gradient de α_k . Il en découle une analogie avec la formulation classique du phénomène de dispersion turbulente des particules, qui n'est absente de l'équation de conservation de la masse (1) qu'en apparence : il suffit d'introduire (6) dans (1) pour la faire réapparaître.

2.3 Fermeture turbulente

Pour modéliser le tenseur des contraintes turbulentes, le concept de diffusivité turbulente a été appliqué à l'ensemble des phases. Par exemple, le terme turbulent de l'équation (2) s'écrit :

$$-k \sum_k \alpha_k \rho_k \overline{u_k' w_k'} = \sum_k \alpha_k \rho_k \nu_t \frac{\partial u}{\partial z} = \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial z} \quad (7)$$

Concernant la distribution verticale des particules, on a vu que les effets turbulents étaient contenus dans la

vitesse de dispersion qui peut s'écrire (Viollet et Simonin, 1992) :

$$Wd_k = -\kappa_t \frac{1}{\alpha_f \alpha_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial z} \quad (8)$$

pour simplifier, on choisit : $\kappa_t = v_t$

Le modèle prévoit 2 options de calcul correspondant à une turbulence (et donc v_t) calculée soit selon un concept de longueur de mélange, éventuellement modulée en fonction d'un nombre de Richardson de gradient, soit à l'aide de l'énergie cinétique turbulente K . Dans ce cas, à partir des travaux de Huynh Thanh *et al.* (1991) s'inspirant de ceux de Sheng et Villaret (in idem), nous avons écrit un modèle à une équation en K :

$$\frac{\partial K}{\partial t} = v_t \left[\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2}_{\text{Production}} - \underbrace{\frac{v_t}{L^2} K + 1,2 \frac{\partial}{\partial z} \left(v_t \frac{\partial K}{\partial z} \right)}_{\text{dissipation}} + \underbrace{\frac{g \kappa_t}{\rho_f} \frac{\partial \rho}{\partial z}}_{\text{diffusion}} \right]$$

avec $v_t = \sqrt{2KL}/4$; L représente une macro-échelle de turbulence, formulée empiriquement (voir Huynh Thanh, 1990) :

$$L = 0,67 z (1 - z/h)^{0,5}$$

On peut noter que le dernier terme de l'équation (9) contribue à l'amortissement de l'énergie turbulente sous l'effet des stratifications. Toutefois, il est probable qu'une stratification importante réduise notablement la macro-échelle de turbulence L : le modèle devra en tenir compte, soit empiriquement, comme pour le modèle en longueur de mélange, soit en ajoutant une équation de transport de L .

2.4 Comportement des sédiments

Le comportement des sédiments intervient dans les équations à plusieurs niveaux :

a) la vitesse relative W_{rel} , qui est la vitesse de chute classique, est calculée par le modèle en fonction de la répartition des contraintes, des caractéristiques des particules et de leur abondance. Dans le cas de fortes concentrations, l'expression de la traînée peut être reformulée de façon à restituer une notion de perméabilité, comme le suggèrent Teisson et Simonin (1993). Ces auteurs rappellent aussi que la composante T_k^{zz} du tenseur des contraintes de contact qui intervient dans (4) est équivalent à la contrainte effective σ' , classique en mécanique des sols (Alexis *et al.*, 1993). Ce terme dans (4) est susceptible de réduire l'effet moteur de la gravité dans le déplacement vertical des particules.

b) Les caractéristiques rhéologiques du sédiment interviennent dans le gradient vertical des contraintes de cisaillement des équations (2) et (3). Si les termes turbulents deviennent négligeables dans les milieux très concentrés du fait de l'amortissement de la turbulence par effet de stratification, au contraire les contraintes "visqueuses" du mélange fluide/particules, $\sum_k T_k^{xz}$ et

$\sum_k T_k^{yz}$, s'accroissent.

Dans l'état actuel du modèle nous considérons que le sédiment vaseux a un comportement de fluide visqueux

(typique de la crème de vase ?), la viscosité augmentant avec la concentration selon une loi puissance :

$$v = a \left(\sum_{k \neq f} \rho_k \alpha_k \right)^b$$

Ultérieurement d'autres modèles rhéologiques (de type Bingham, thixotropique...) pourront être introduits, faisant probablement apparaître des difficultés numériques (Toorman, 1992).

2.5. Quelques considérations numériques

A chaque pas de temps, le modèle calcule successivement les vitesses verticales [éq. (4) puis (8) et (6)], la conservation de la masse pour chaque phase [éq. (1)], la distribution verticale des vitesses horizontales [éq. (2) et (3)] et les paramètres turbulents (transport de l'énergie cinétique ou longueur de mélange). Les équations sont discrétisées en différences finies selon un schéma implicite, avec un maillage vertical variable en général raffiné vers le bas. Les vitesses verticales sont calculées par itérations tandis que les systèmes linéaires "tridiagonaux" formés en discrétisant les équations de transport [éq. (1), (2), (3) et (9)] sont résolus à l'aide d'une méthode à double balayage.

3. APPLICATIONS

Le modèle 1DV a été exploité aussi bien dans le domaine de l'hydrodynamique côtière que dans celui de l'"hydrosédimentaire" (Cugier, 1993), en particulier pour :

- des calculs de couche-limite sous l'action combinée d'une houle et d'un courant, avec estimation du frottement exercé sur le fond,
- la mise en évidence d'une hystérésis entre le frottement sur le fond et le courant dans un régime alternatif de marée, le frottement étant supérieur en décélération qu'en accélération,
- la simulation de la "spirale d'Ekman",
- l'établissement d'un profil d'équilibre de concentration en suspension (sans effet de couplage avec l'hydrodynamique),
- la chute et le début de tassement des particules dans une colonne à sédimentation.

Nous présentons ici deux applications très contrastées de façon à montrer l'éventail des possibilités de ce type de modèle.

3.1. Résolution d'une couche-limite de houle

Nous avons cherché à reproduire les mesures de vitesse orbitale dans une couche-limite de houle que Sumer *et al.* (en 1986, in Huynh Thanh, 1990) ont obtenues en canal à l'aide d'un vélocimètre laser.

Le gradient de pression qui constitue le forçage a été dérivé de la formulation analytique du profil de pression issue de la théorie linéaire (et sans frottement...) de la houle, et appliqué à une colonne d'eau de 5 m de hauteur. La figure 1 montre l'accord entre le modèle et les mesures, mettant en évidence le "gonflement"

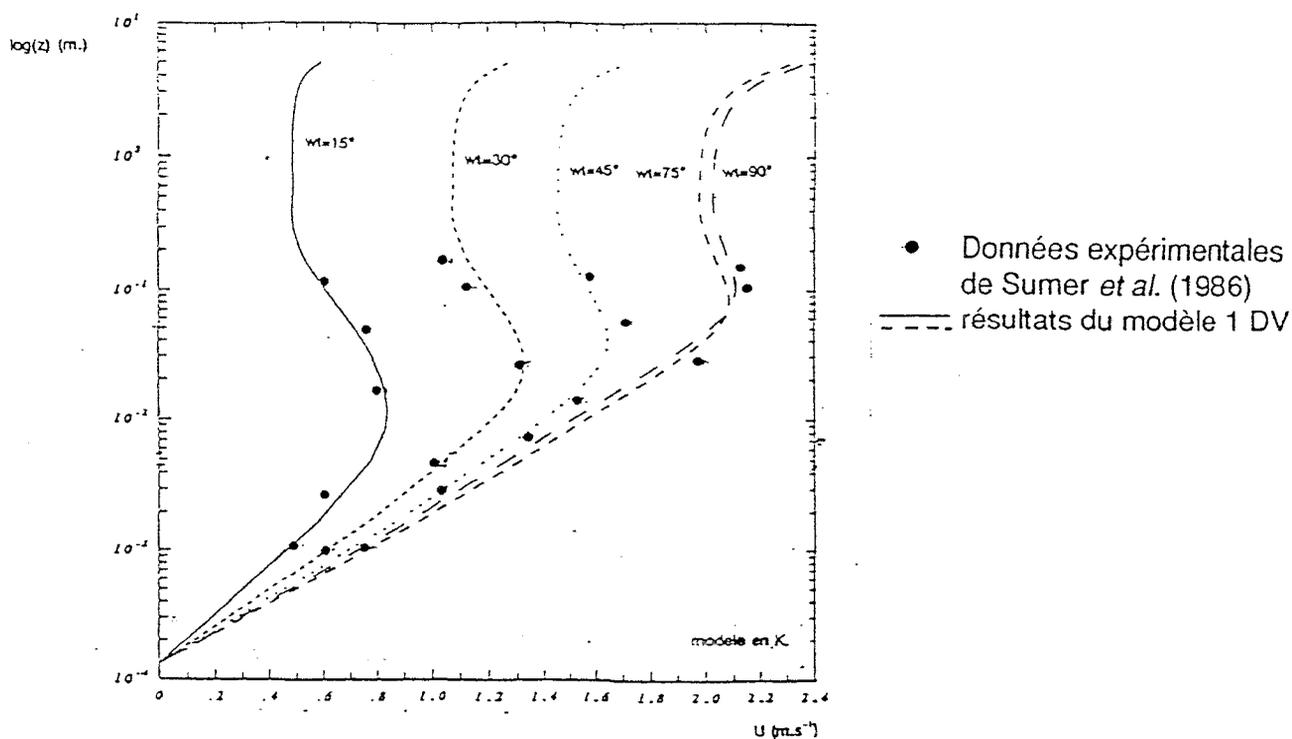


Figure 1: Profils de vitesse orbitale de houle pour 6 phases différentes (période : 8,1 s ; longueur de rugosité : 0,13 mm ; hauteur de houle théorique : 3,3 m).

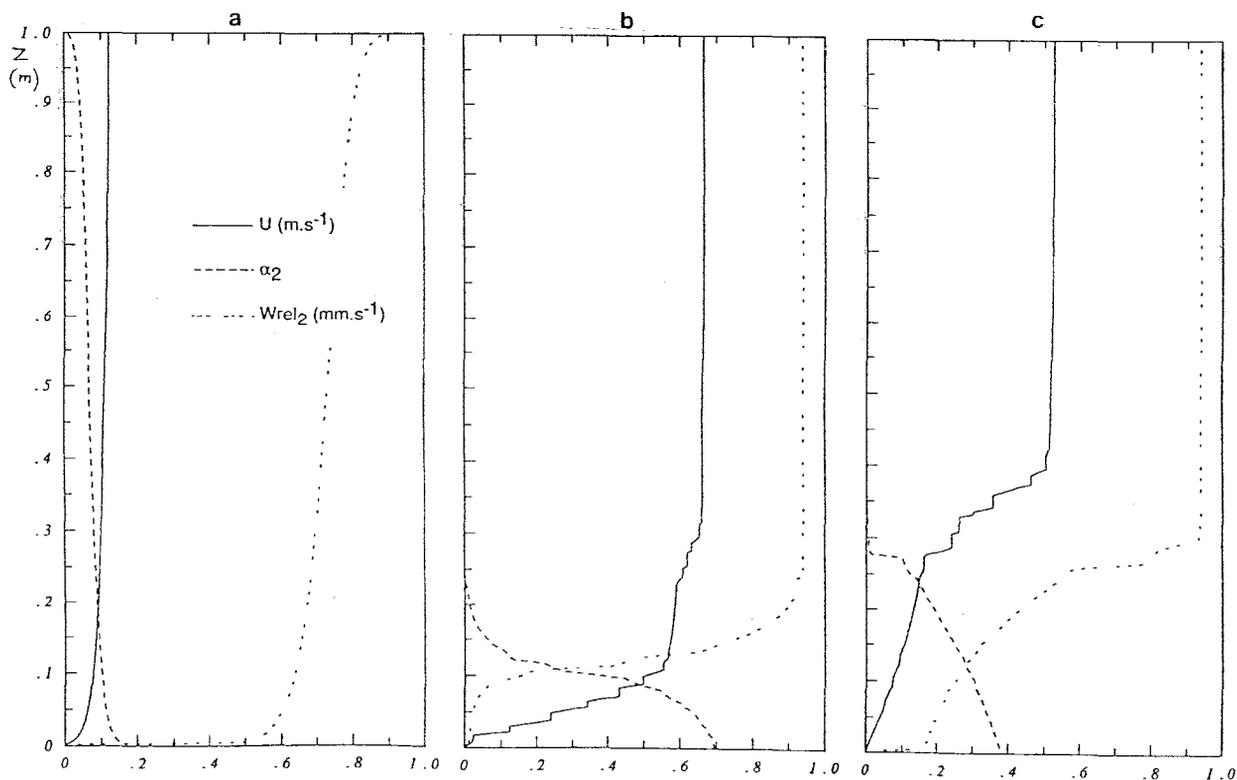


Figure 2: Calcul de la distribution verticale de floes dans un courant.

- a) Calcul non couplé des vitesses et des concentrations.
- b) Calcul couplé : amortissement de la turbulence par les stratifications.
- c) Idem + accroissement de la viscosité dans la crème de vase.

caractéristique du profil de vitesse dans la couche-limite, et reproduit d'autre part un profil en cosh ($2\pi z/L$) au-dessus de celle-ci. Les termes de viscosité calculés dans cette région se sont révélés négligeables, ce qui justifie a posteriori l'expression du forçage précédemment adopté.

3.2. Profil de concentration dans un courant

Pour tester l'effet des fortes charges particulières sur le profil d'un courant et sur la distribution verticale des concentrations à l'équilibre, nous avons considéré l'évolution d'un profil uniforme fortement chargé en particules de faible densité correspondant à des floes de matériaux cohésifs (cas schématisé proposé par Teisson et al. (1992) : $h = 1$ m, 2 phases, $\rho_2 = 1070$ kg.m⁻³, $d_2 = 0,16$ mm, α_2 initial = 7 %). La figure 2 illustre d'une part la formation d'une "crème de vase" où la vitesse de chute (W_{rel}) est fortement réduite, d'autre part la discontinuité du profil de vitesse au niveau de la lutocline principale, induite par la réduction de la diffusivité turbulente dans la zone stratifiée, et enfin l'effet d'un accroissement de viscosité dans la couche "crème" (fig. 2c). On notera en particulier la grande variation du courant moyen, alors que le forçage hydraulique reste le même (pente de la surface libre)

Les tests effectués pour cette simulation ont montré une très grande sensibilité des résultats à la modélisation de la turbulence et à son paramétrage, mais aussi une lenteur pour atteindre un régime d'équilibre, ce qui peut générer des effets fortement non linéaires dans le cas d'un forçage hydraulique non permanent.

CONCLUSION

Malgré les simplifications adoptées et son faible coût, le modèle 1DV semble capable de traiter de multiples processus relevant de l'hydrosédimentaire.

En particulier l'intégration des matériaux déposés dans un maillage de calcul très raffiné permet de prendre en compte simultanément les phénomènes de chute (entravée ou non), de tassement, de remise en suspension et de dispersion (turbulente ou non) qui sont souvent traités de manière empirique et découplée dans les modèles classiques de transport sédimentaire.

Le modèle 1DV intégré doit constituer un outil d'investigation poussée de ces processus dans le but de reformuler les "lois sédimentaires" utilisées par les modèles d'ingénierie.

Les premiers tests sur la formation d'une couche de crème de vase ont montré l'importance de la formulation des échanges turbulents et la probable nécessité d'une modélisation K- ϵ de la turbulence, ainsi que l'effet prépondérant du comportement rhéologique du sédiment sur l'écoulement. Une confrontation de ces résultats avec des mesures de profils de vitesse et concentration dans l'estuaire de la Loire (expérience "crème de Loire 1991") doit être menée prochainement.

Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre du Programme National d'Océanographie Côtière et dans celui du programme "G8 Coastal Morphodynamics" cofinancé par

la Commission des Communautés Européennes, D.G. Recherche et Développement Scientifique (contrat MAS2-CT-920027).

Références

Alexis A., Thomas P., Gallois S. 1993. Tassement des sédiments cohésifs. Contrat de recherche EDF/IFREMER/UT Saint-Nazaire, 134 p.

Cugier Ph. 1993. Elaboration d'un modèle numérique simplifié en vue de la simulation des processus verticaux dans la tranche d'eau et les sédiments superficiels. Rap. de DEA, Univ. Marseille/IFREMER.

Huynh-Thanh S. 1990. Etude numérique de la couche-limite turbulente oscillatoire générée par l'interaction houle-courant en zone côtière. Thèse présentée à l'I.N.P. Grenoble.

Huynh-Thanh S., Hamm L., Temperville A. 1991. Analysis of the erosional behavior of cohesive sediments with a stratified turbulent transport model. In Proc. of Int. Symp. on the Transport of Suspended Sediments and its Mathematical Modelling, Florence, 423-431.

Kirby R. 1988. High concentration suspension (fluid mud) layers in estuaries. In J. Dronkers and W. Van Leussen (eds.): Physical Processes in Estuaries, Springer-Verlag, 463-487.

Teisson C., Simonin O., Galland J.C., Laurence D. 1992. Turbulence and mud sedimentation: a Reynolds stress model and a two-phase flow model. Proc. 23rd Int. Conf. on Coastal Engineering, ASCE.

Teisson C., Simonin O. 1993. Simulating turbulent vertical exchanges of mud concentration and bed consolidation with a two-phase flow model. EUROMECH 310, Le Havre, 13-17 September 1993.

Toorman E. 1992. Modelling of fluid mud flow and consolidation. PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven.

Viollet P.L., Simonin O. 1992. Introduction à la modélisation des écoulements constitués d'une phase continue contenant des inclusions dispersées en mouvement. Cours de l'école nationale des ponts et chaussées, 43 p + annexe.

QUESTION DE MONSIEUR GROVEL

Quand vous introduirez la viscosité dans votre modèle en faites-vous une fonction de la température ?

REPOSE

Actuellement nous ne prenons pas en compte l'effet de la température : nous n'avons pas cherché à mettre en évidence des variations saisonnières. Il n'y a aucun problème pour le faire, puisque la viscosité "effective" dans le modèle contient 3 termes : la viscosité moléculaire de l'eau (où justement la température pourrait intervenir), la viscosité turbulente et l'accroissement de la viscosité "moléculaire" lié aux fortes concentrations : nous avons privilégié l'étude de ces deux derniers effets, qui nous semblent primordiaux.

NOTATIONS

h	hauteur d'eau.
k	indice relatif à la phase k (fluide ou particulaire).
f	indice relatif à la phase fluide.
α_k	concentration volumique de la phase k.
ρ_k	masse volumique de la phase k.
d_k	diamètre moyen des particules constituant la phase k.
ρ	masse volumique du mélange.
U, V	composantes horizontales de la vitesse moyenne du mélange.
W_k	vitesse verticale moyenne de la phase k.
$Wrel_k$	vitesse relative (par rapport au fluide) de la phase k.
Wd_k	vitesse de dispersion de la phase k.
u'_k, v'_k, w'_k	composantes horizontale et verticale de la fluctuation turbulente de vitesse de la phase k
Γ_k	taux de transfert de masse interfacial entre la phase k et les autres.
P	pression moyenne du fluide.
g	accélération de la pesanteur.
f	paramètre de Coriolis.
T_f^{ij}	tenseur des contraintes visqueuses.
T_k^{ij}	tenseur des contraintes de "contact" relatives à la phase k.
ν_f	viscosité du fluide.
ν_t	diffusivité turbulente.
κ_t	diffusivité turbulente des particules.
K:	énergie cinétique turbulente.
L	macro échelle de turbulence.

ANNEXE : EXPRESSION DE LA FORCE DE TRAINEE

La force de traînée F par unité de volume de la phase k, appliquée à une particule sphérique de diamètre d peut s'écrire:

$$F = \frac{3}{4} \frac{C_d \rho_f}{d_k} Wrel_k^2$$

avec C_d , coefficient de traînée, dépendant du nombre de Reynolds Re relatif à l'écoulement autour de la particule.

$$\text{soit} \quad Re = \frac{\alpha_f Wrel_k d_k}{\nu_f}$$

a) si $Re < 1000$ (écoulement laminaire ou faiblement turbulent, pour les particules petites ou peu denses) (e.g. in Viollet et Simonin, 1992)

$$Cd = \frac{24}{Re} (1 + 0,15 Re^{0,687}) \alpha^{-1,7} \quad \text{et} \quad F = \frac{18 \nu_f \rho_f}{\alpha_f^{2,7} d_k^2} Wrel_k \left(1 + 0,15 \left(\frac{\alpha Wrel_k d_k}{\nu_f} \right)^{0,687} \right) \quad (10)$$

b) si $Re > 1000$ (écoulement fortement turbulent, atteint pour les fortes vitesses de chute Wrel, donc les particules denses et grosses).

$$Cd = 0,44 \quad \text{et} \quad F = 0,33 \frac{Wrel_k^2}{d_k} \quad (11)$$

NB: Pour de faibles nombres de Reynolds, l'expression (10) se simplifie et l'équation (4) peut s'écrire (en l'absence de turbulence et d'échanges de masse entre phases) :

$$\frac{18\nu_f}{\alpha_f^{2,7} d_k^2} W_{rel,k} = \left(\sum_I \alpha_I \rho_I - \rho_k \right) g$$

soit, pour une seule phase particulaire :

$$W_{rel} = \alpha_f^{3,7} \frac{d^2}{18\nu_f \rho_f} g(\rho_2 - \rho_f)$$

Il s'agit de la loi de Stokes, avec un terme d'entravement tel qu'introduit par Richardson et Zaki en 1954.