



# MODELISATION NUMERIQUE DU CYCLE DE MAREE SUR LE PLATEAU CONTINENTAL NORD-OUEST EUROPEEN

J.C GALLAND ; J.M JANIN  
Laboratoire National d'Hydraulique  
6, Quai Watier - 78400 CHATOU

## **ABSTRACT**

*A tidal simulation has been performed by the L.N.H.(Laboratoire National d'Hydraulique of Electricité de France) during a complete moon cycle in order to calculate current fields in the English Channel and the close Atlantique. These tidal currents combined with wind-induced-currents are aimed at predicting the movements of polluted matters.They will be used also as boundary conditions for modelling local areas.*

*The study area as it ends farther off the continental shelf encloses an exceptionnal number of elements (20,000). However, the recent improvements in numerical methods and computers allow this calculation with a reasonable cost. The finite element technic is also used very favourably as the surface of an element decreases from 500 square miles along the west boundary to 1 square mile along the coast. Consequently, a new performance has been reached: modelising tidal currents inside a very large oceanic area with an extreme precision along the coast.*

## **1. INTRODUCTION**

La simulation déterministe de la marée a été réalisée par le L.N.H. sur un cycle lunaire afin de calculer des champs de courants sous forme de coefficients de Fourier (1) dans l'ensemble de la Manche et du proche Atlantique. Ces champs, ajoutés aux courants engendrés par le vent, permettront de suivre le déplacement de nappes de polluants. Ils constitueront également une banque de données utilisables pour des études sur la qualité de l'eau ou encore comme conditions limites de modèles plus locaux tels que ceux réalisés généralement par le L.N.H., etc...

## 2. DESCRIPTION DU MODELE NUMERIQUE TELEMAC

Le code TELEMAC (2) est un programme de résolution des équations de Saint-Venant bidimensionnelles par la méthode des éléments finis. On suppose que la pression est hydrostatique et que les vitesses sont homogènes sur la verticale. Les hétérogénéités des vitesses sur la verticale sont prises en compte dans les termes de diffusion. En formulation célérité-vitesse, on obtient dans le plan de Mercator (3), les équations suivantes, qui expriment la conservation de la masse d'eau (équation 1), et celle de la quantité de mouvement (équation 2) (la célérité est donnée par  $c^2=gh$ ) :

$$2c \frac{\partial c}{\partial t} + 2c \vec{u} \cdot \frac{1}{\cos \lambda} \overrightarrow{\text{grad}} c' + \frac{c^2}{\cos \lambda} \text{div} \vec{u} - \frac{c^2}{R} \text{tg} \lambda \cdot v = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left( \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}}{\cos \lambda} \right) \vec{u} + 2c \frac{1}{\cos \lambda} \overrightarrow{\text{grad}} c = \frac{1}{\cos^2 \lambda} \text{div} (\nu \overrightarrow{\text{grad}} \vec{u}) -$$

$$g \frac{1}{\cos \lambda} \overrightarrow{\text{grad}} Z_f + \vec{S}$$

$u, v$  : composantes de la vitesse ,  $\vec{S}$  : termes sources

$$(\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j}).$$

$c$  : célérité des ondes longues.  $g$  : accélération de la pesanteur.

$z$  : cote de la surface libre.  $n$  : coefficient de diffusion.

$Z_f$  : cote du fond ( $z = h + Z_f$ ).  $\lambda$  : latitude.

### 2.1 Termes sources

Le frottement sur le fond :

$$\vec{S}_f = -\frac{g}{h C_z^2} |\vec{u}| \vec{u}$$

$C_z$  : coefficient de Chézy

La force de Coriolis :

$$\vec{S}_c = -2\omega \sin \lambda \vec{k} \wedge \vec{u}$$

$\omega$  : vitesse angulaire de rotation de la terre

$\vec{k}$  : vecteur unitaire vertical dirigé vers le zénith

### 2.2 Méthode de résolution

Les équations sont traitées en 2 étapes grâce à la méthode des pas fractionnaires.

Dans la première étape sont traités les termes de convection qui correspondent au transport des grandeurs physiques  $c,u,v$ . La méthode des caractéristiques qui y est bien adaptée est utilisée; toutefois la convection de la variable  $c$ , qui confère au modèle de bonnes propriétés pour les écoulements transcritiques, a l'inconvénient de ne pas être conservative.

Dans la seconde étape est traité le "reste" des équations : propagation, diffusion et termes sources. Cette étape est résolue par la technique des éléments finis; une discrétisation en temps permet tout d'abord d'éliminer les non-linéarités des équations. Discrétisation spatiale et formulation variationnelle transforment ensuite les équations continues en un système linéaire discret dont les inconnues sont les valeurs des grandeurs physiques  $c,u,v$  aux noeuds du maillage. Ce système est ensuite résolu par une méthode itérative de type "gradient conjugué".

### 3. DOMAINE DE CALCUL

Un workshop international récent (cf. (5)) ayant pour objectif la comparaison de codes en éléments finis résolvant les équations de Saint-Venant, sur un domaine comprenant la partie Sud de la mer du Nord et la Manche jusqu'à la longitude de Roscoff, fournit des données complètes (mesures des marnages et phases de toute une série de composantes de la marée) sur ces frontières.

Cependant, il a été décidé, pour obtenir également des résultats en Bretagne Sud, d'étendre le domaine de calcul précédent vers l'Ouest (cf. (8)). Pour ce faire, il était nécessaire de disposer de données complètes en Atlantique. Or il est d'une part difficile de trouver un jeu complet et cohérent d'informations sur une bande proche des côtes françaises et englobant la Bretagne et d'autre part l'expérience montre que le réglage d'un modèle sur une telle emprise est très délicat. Ces deux points nous ont conduit à étendre le domaine de calcul à toute la façade Atlantique française et, vers le large, jusqu'au delà du plateau continental.

Inclure le bord du plateau continental dans le domaine de calcul est intéressant du point de vue des conditions aux limites. En effet, celui-ci se comporte comme un filtre pour les ondes venant du large : elles se trouvent à la fois réfléchies et diffractées par les très importants gradients de fonds qui existent à cet endroit ; ce phénomène permet aux résultats de calcul d'être moins dépendants des conditions aux limites utilisées à la frontière Ouest (la très forte dépendance des résultats de simulation vis à vis des conditions aux limites Ouest, pour des domaines de calcul du "type" Manche, a déjà été notée par plusieurs auteurs (cf. en particulier (6)). L'emprise du domaine complet de calcul avec le maillage est présentée sur la figure 1.

#### 4. CONDITIONS AUX LIMITES TESTEES

Trois types de conditions limites ont été testées successivement :

- onde incidente
- onde totale
- hauteur imposée avec sous-itération

##### 4.1 Condition d'onde incidente

La condition de radiation dite 'd'onde incidente', a été testée dans un premier temps ; elle s'écrit pour une onde de fréquence  $\omega$  en un point M :

$$c \vec{u} \cdot \vec{n} = g S - g (1 - \vec{k} \cdot \vec{n}) \hat{S}$$

avec :  $\vec{n}$  : vecteur unitaire normal extérieur à la frontière du domaine en M

$S$  : élévation de la surface libre à l'instant  $t$  en M

$\vec{k}$  : vecteur d'onde unitaire en M

$\hat{S} = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$  : signal incident sinusoïdal du temps homogène à une hauteur

La connaissance de  $A(M)$  et  $\varphi(M)$ , amplitude et phase de l'onde incidente au point (M) est très difficile à obtenir puisque les mesures en nature fournissent, elles, amplitude et phase de l'onde totale.

Nous avons alors développé un calcul itératif par rétroaction qui devait permettre de trouver les couples  $(A(M), \varphi(M))$  aux points frontières. Le critère de rétroaction était de comparer l'onde totale calculée en un point frontière M avec la donnée nature et d'en tenir compte pour le couple  $(A(M), \varphi(M))$  de l'itération suivante. Cette méthode, malheureusement, ne faisant pas interagir les points entre eux, n'a pas permis de restituer de façon satisfaisante le signal de marée et a donc été abandonnée.

##### 4.2 Condition d'onde totale

Une autre condition de radiation, formulée par Flather (cf. (7)), a alors été développée dans Télémac, puis testée avec un relatif succès dans le cas présent; elle s'écrit pour une onde de fréquence  $\omega$  :

$$c \vec{u} \cdot \vec{n} = c \hat{u} + g (S - \hat{S})$$

avec :

$\hat{u} = U(M) \cos(\omega t + \phi(M))$  : signal sinusoïdal du temps homogène à une vitesse

Elle suppose, et c'est là son atout, que  $U(M)$  est donné par l'amplitude et la

Elle suppose, et c'est là son atout, que  $\hat{S}$  est donné par l'amplitude et la phase de l'onde totale et non uniquement de l'onde incidente. Par contre, elle nécessite de définir un nouveau signal  $\hat{u}$ , homogène à une vitesse obtenu par analyse de Fourier de  $\vec{u} \cdot \vec{n}(t)$ . Le calcul se fait par itérations d'une durée multiple de la période de l'onde de marée considérée :

- à la première itération :  $\hat{u}$  est nul
- à l'itération n+1 :  $\hat{u}$  est le résultat de l'analyse de Fourier de  $\vec{u} \cdot \vec{n}(t)$ , à l'itération n.

Une étude détaillée sur la convergence du calcul montre que celle-ci est assurée quelque soit la valeur de  $\hat{u}$  à la première itération.

Cette condition de radiation a été testée pour l'onde de marée semi-diurne M2, dominante dans notre domaine. Les cartes de phase et d'amplitude de M2, obtenues par analyse de Fourier de l'élévation  $S(t)$  calculée par le modèle sont très conformes aux mesures effectuées dans cette zone.

Cette méthode, formulée pour une onde, s'applique aussi pour n ondes de fréquences distinctes par simple sommation des signaux :

$$c \vec{u} \cdot \vec{n} = c \hat{u}_{\text{tot}} + g (S - \hat{S}_{\text{tot}}) \text{ avec } \hat{u}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \hat{u}_i \text{ et } \hat{S}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \hat{S}_i$$

Cependant, pour calculer les  $\hat{u}_i$ , à chaque itération, par analyse de Fourier de  $\vec{u} \cdot \vec{n}(t)$ , il est nécessaire que l'itération ait une durée suffisante qui permette de séparer les différentes fréquences  $\omega_i$  associées. Cette durée minimale est de l'ordre de :

$$\frac{2\pi}{\min_{i \neq j} |\omega_i - \omega_j|}$$

Ainsi pour séparer M2 et S2, les deux principales composantes de la marée en Manche, 15 jours de simulations sont nécessaires par itération. Si on suppose que 8 itérations sont nécessaires pour la convergence du calcul, c'est en tout 4 mois de simulation dont nous avons besoin, soit quelques heures de temps calcul pour un ordinateur Cray... Dès lors, il était trop onéreux d'utiliser cette méthode dans un modèle de marée à plusieurs ondes.

#### 4.3 Hauteur imposée couplée à une méthode de type prédicteur correcteur

Imposer les hauteurs aux frontières maritimes, pour un schéma sans "correction", rend le calcul instable au niveau de la marche du plateau continental, à cause de la convection de 'c'. La solution préconisée a été l'emploi d'une méthode de type "prédicteur-correcteur" qui consiste à itérer

deux fois l'étape de convection à chaque pas de temps, la seconde itération corrigeant le résultat de la première.

Nous avons observé alors que la seule condition limite de hauteur ne rendait plus le calcul instable.

Les résultats obtenus après 4 marées, avec cet algorithme, sont apparus excellents, de qualité équivalente à ceux obtenus avec la condition de radiation formulée par Flather. Ce schéma a finalement été retenu.

Le schéma "prédicteur-correcteur" a permis également de paramétrer un centrage en temps du champ convecteur puisque la première itération fournit une estimation du champ de vitesse au pas de temps en cours.

## 5. ANALYSE HARMONIQUE ET SES CONTRAINTES

La théorie dynamique des marées océaniques permet d'associer à chaque fonction circulaire de pulsation connue, constitutive du potentiel générateur des marées, un mouvement forcé de même période dont l'amplitude et la phase dépendent des conditions hydrodynamiques du système océanique traité. Dans le cas des mers littorales, il convient d'ajouter au spectre précédent des ondes supérieures et composées pour tenir compte des déformations de la marée dans les zones de faible profondeur.

La dénivellation de la surface libre de la mer ou les composantes du vecteur vitesse des courants de marée en un point  $M(x,y)$  s'exprime alors de façon approchée, en négligeant les coefficients de correction nodale et le niveau moyen, sous la forme :

$$S_{ap}(x, y, t) = \sum_{i=1}^N S_i(x, y) \cos [\omega_i (t - t_0) - g_i(x, y)]$$

avec

$N$  : nombres d'ondes considérées.

$\omega_i$  : pulsation de la composante  $i$ .

$S_i(x,y)$  : amplitude de la composante  $i$  en  $M$ .

$g_i(x,y)$  : déphasage de la composante  $i$  en  $M$  par rapport à  $t_0$ .

$t_0$  : temps de référence choisi conventionnellement à une heure de passage de l'astre perturbateur à la verticale du méridien de Greenwich.

### 5.1 Méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés consiste à trouver, en chaque point, les paramètres  $S_i$  et  $g_i$  (ou plutôt  $a_i$  et  $b_i$ ) de la fonction  $S_{ap}$  qui minimisent la moyenne des carrés des écarts entre cette fonction et les observations du modèle. Les paramètres  $a_i$  et  $b_i$  sont donnés par :

$$a_i = S_i(x, y) \cos (\omega_i t_0 + g_i (x, y))$$

$$b_i = S_i(x, y) \sin (\omega_i t_0 + g_i (x, y))$$

La moyenne des carrés des écarts ou erreur quadratique moyenne  $E$  est définie alors pour  $2m+1$  observations choisies régulièrement espacées de part et d'autre de  $t=0$ , par :

$$E = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=0}^m (S_{obs}(k\Delta t) - S_{ap}(k\Delta t))^2$$

La minimisation de  $E$  est obtenue en annulant chacune de ses dérivées par rapport à  $a_i$  et  $b_i$ . Ainsi, nous construisons un système de  $2N$  équations à  $2N$  inconnues que l'on écrit sous forme de deux systèmes matriciels car les variables  $a_i$  et  $b_i$  sont séparables :

$$(M_{a_i,j}) (a_j) = (S_{a_j})$$

$$(M_{b_i,j}) (b_j) = (S_{b_j})$$

Les matrices  $(M_{a_i,j})$  et  $(M_{b_i,j})$  sont symétriques, elles ont également la particularité de tendre vers la matrice identité lorsque le nombre  $2m+1$  d'échantillonnages grandit. En cela, cette méthode converge vers l'analyse de Fourier qui revient à résoudre les mêmes systèmes mais avec des matrices  $(M_{a_i,j})$  et  $(M_{b_i,j})$  égales à la matrice identité. En fait, par rapport à l'analyse de Fourier, cette méthode a l'avantage de tenir compte, pour des échantillonnages de courte durée, des corrélations qui existent entre les fréquences voisines.

### 5.2 Contrainte de l'analyse

Si pour une durée d'enregistrement donnée, on a à séparer deux ondes de fréquences très voisines, les lignes correspondantes dans les matrices seront pratiquement égales et les systèmes, rendus singuliers, ne pourront être résolus. Ainsi, on définit la période de battement entre les ondes  $i$  et  $j$ , période nécessaire pour qu'une des deux ait effectué un cycle de plus que l'autre. Elle est égale à :

$$\frac{2\pi}{|\omega_i - \omega_j|} \text{ ou } \frac{1}{\left| \frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_j} \right|}$$

Cette période fixe l'ordre de grandeur que doit avoir au minimum la durée de l'enregistrement pour tenir compte à la fois de l'onde i et de l'onde j lors de l'analyse harmonique. Les périodes de battement des 4 principales composantes - N2, M2, S2 et K2 - sont :

N2 , M2	27,55 jours	M2 , S2	14,76 jours
N2 , S2	9,60 jours	M2 , K2	13,66 jours
N2 , K2	9,10 jours	S2 , K2	182,61 jours

Nous constatons que pour un enregistrement de l'ordre du mois, il n'est pas possible de tenir compte à la fois de S2 et de K2. Cette dernière étant de plus faible amplitude, elle sera négligée.

## 6. COMPOSANTES SIMULEES

L'analyse des données sur 10 points d'observation, permet de classer les composantes par amplitude. Ainsi, par ordre décroissant d'importance, les ondes retenues sont les suivantes:

- M2, semi-diurne, onde lunaire moyenne, amplitude moyenne 220cm,
- S2, semi-diurne, onde solaire moyenne, amplitude moyenne 75cm,
- N2, semi-diurne, onde elliptique lunaire majeure, amplitude moyenne 40cm.

Ces trois ondes que l'on peut séparer sur un cycle lunaire permettent une simulation assez complète de la marée car les effets non linéaires lors de leur propagation sur notre domaine génèrent des harmoniques importantes comme M4 (quart-diurne, amplitude moyenne 18cm), MS4 (quart-diurne, amplitude moyenne 12cm), MN4 (quart-diurne, amplitude moyenne 6.5cm), M6 (sixième-diurne, amplitude moyenne 5cm).

## 7. RESULTATS ET COMPARAISONS

Les résultats des simulations pour chacune des composantes implantées dans le modèle ont été comparés aux cartes produites par Chabert d'Hières et Le Provost (4) sur la plaque tournante de l'INPG de Grenoble et aux mesures en nature fournies par les documents (5) et (6).

Concernant les élévations, les amplitudes et les phases des ondes semi-diurnes du modèle sont en très bon accord. Pour l'onde M2, par exemple, les écarts observés sont inférieurs en tout point à 20 cm pour l'amplitude et à 10 degrés pour la phase. Les amplitudes et les phases des ondes non linéaires sont bien restituées par le code en Manche orientale et en Mer du Nord. Des erreurs plus importantes sont à noter en Manche occidentale et en Atlantique où l'influence de la marche du plateau continental est prédominante.



En terme de vitesse, les composantes obtenues par l'analyse harmonique sont conformes dans la Manche aux résultats obtenus par Fornérino dans sa thèse qu'elle avait elle-même comparés très favorablement avec les mesures du S.H.O.M.. Une étude comparative détaillée avec ces mesures de courant est en cours.

## 8. CONCLUSION

Cette modélisation de la marée sur un domaine qui s'étend au-delà du plateau continental a mis en jeu un très grand nombre d'éléments (20 000). Cela a été permis grâce à l'amélioration constante des performances des ordinateurs mais aussi grâce aux progrès réalisés dernièrement en analyse numérique quant à la résolution de systèmes linéaires en éléments finis. Les matrices ne sont plus assemblées et le calcul s'effectue élément par élément.

La technique des éléments finis a également été utilisée au mieux par rapport à une discrétisation en différences finies car la taille des mailles décroît de 2000 à 4 km<sup>2</sup> de la frontière ouest à la côte. Ainsi, une nouvelle performance a été réalisée :

- modéliser les courants de marée au sein d'un très grand domaine
- obtenir une grande précision à la côte.

Les résultats obtenus, en terme d'élévation, sont partout comparables aux différentes mesures effectuées ainsi qu'aux résultats d'autres modèles physiques et numériques. Les élévations des composantes semi-diurnes sont particulièrement bien rendues.

Le facteur limitant du modèle, actuellement, est la non représentation de l'onde K2 compte tenu des contraintes de l'analyse harmonique. L'amplitude de cette onde en moyenne sur 10 points est 6% de la somme des amplitudes des autres ondes représentées.

## 9. REMERCIEMENTS

Cette étude a été financée en partie par le Service Technique de la Navigation Maritime et des Transmissions de l'Équipement, dans le cadre de la convention bipartite E.D.F.-Ministères

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

- (1) M. FORNERINO  
Modélisation des courants de marée dans la Manche  
Thèse USMG, INPG 1982
- (2) J.C. GALLAND, J.M. HERVOUET  
Projet Saint-Venant  
Code TELEMAC version 1.0  
Note de principe  
Rapport EDF HE-43/90.04
- (3) F. LEPEINTRE  
Comment résoudre les équations de Saint-Venant sphériques  
avec un code résolvant les équations de Saint-Venant  
cartésiennes. Application au code TELEMAC.  
Rapport EDF HE-41/89-28
- (4) G. CHABERT D'HIERES, C. LE PROVOST  
Atlas des composantes harmoniques de la marée dans la Manche  
Institut de Mécanique de Grenoble 1978
- (5) TIDAL FLOW FORUM  
6th International Conference on Computational Methods in Water  
Resources  
Adv. in Water Resources, 1987, Vol. 10
- (6) D.E. CARTWRIGHT, ANNE C. EDDEN, R. SPENCER & J.M. VASSIE  
The tides of the Northeast Atlantic ocean  
Institute of Oceanographic Sciences, Bidston  
Observatory, Birkenhead, Merseyside L43 7RA, U.K  
Vol 298, A 1436
- (7) R.A. FLATHER  
A tidal model of the north-west european continental shelf  
Institute of Oceanographic Sciences, Bidston  
Observatory, Birkenhead, Merseyside L43 7RA, U.K
- (8) J.C. GALLAND, J.M. JANIN  
Simulation des courants de marée en Manche  
Première partie  
Rapport EDF HE-42/91.13

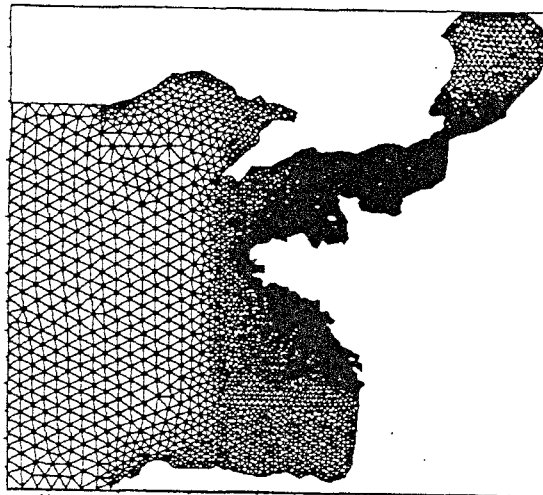


Fig.1 : Côtes ouest d'Europe - Maillage

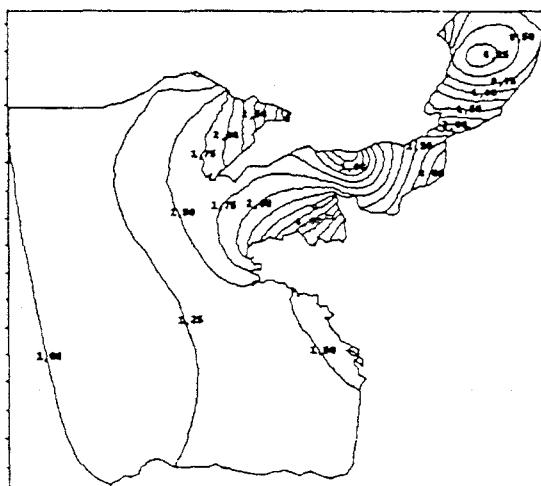


Fig. 2 : Demi-amplitude - onde M2 (modèle LNH)

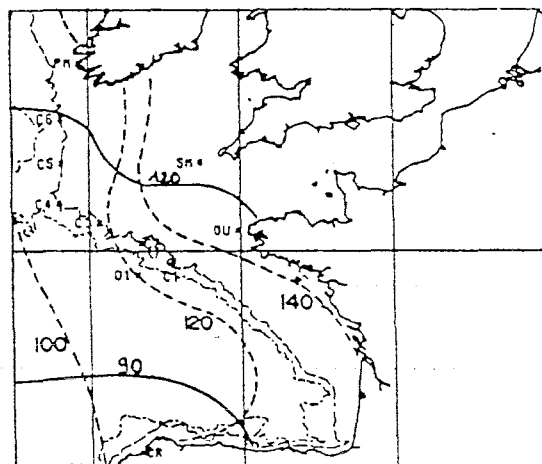


Fig. 4 : onde M2 (réf. (6))

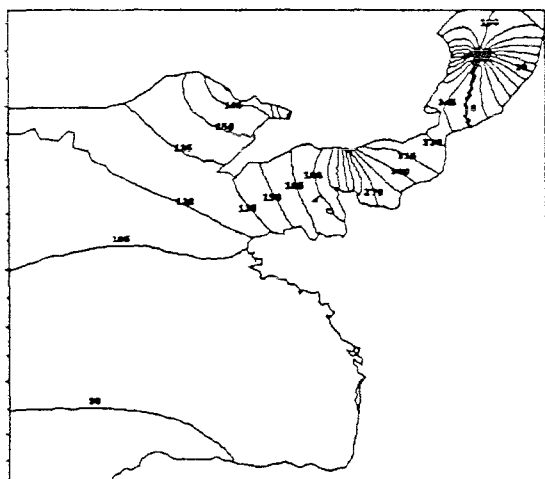


Fig. 3 : phase - onde M2 (modèle LNH)

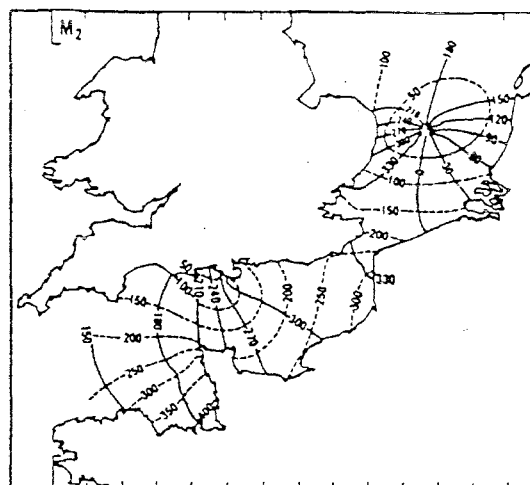


Fig. 5 : onde M2 (réf. (5))

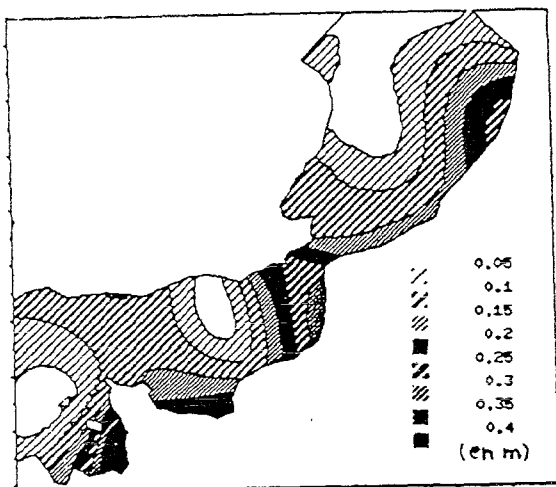


Fig. 6 : demi-amplitude - onde M4 (modèle LNH)

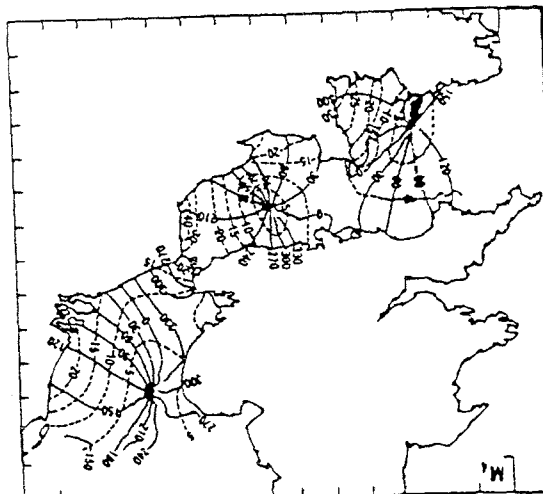


Fig. 7 : onde M4 (réf.(5))

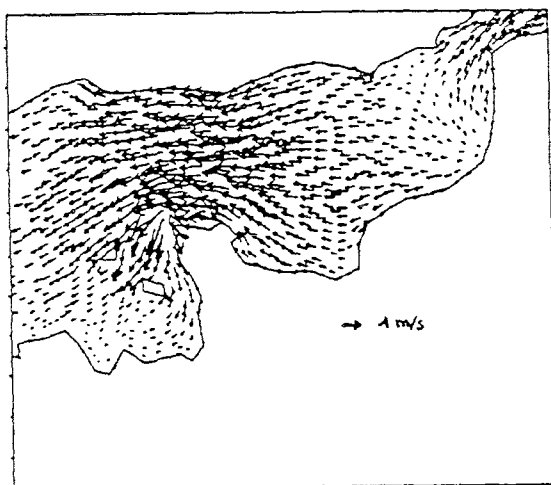


Fig. 8 : Courants M2 - PM+6 à St Malo (modèle LNH)

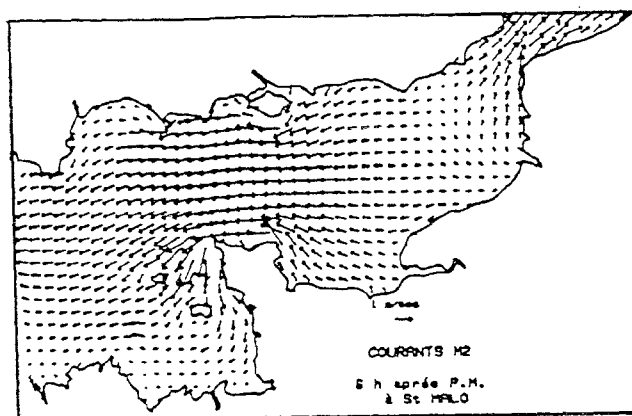


Fig. 9 : Courants M2 (réf. (1))

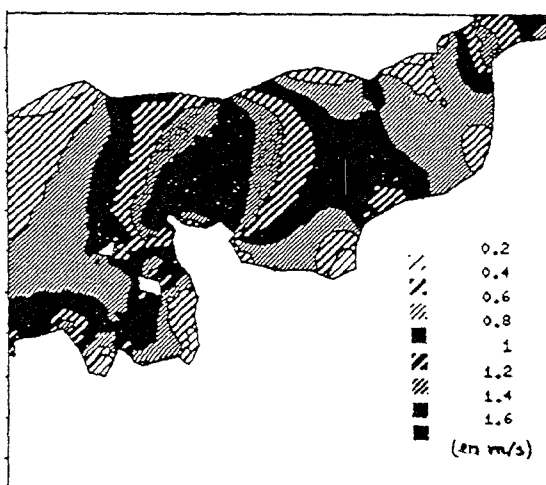


Fig. 10 : Amplitude du courant M2 max (modèle LNH)

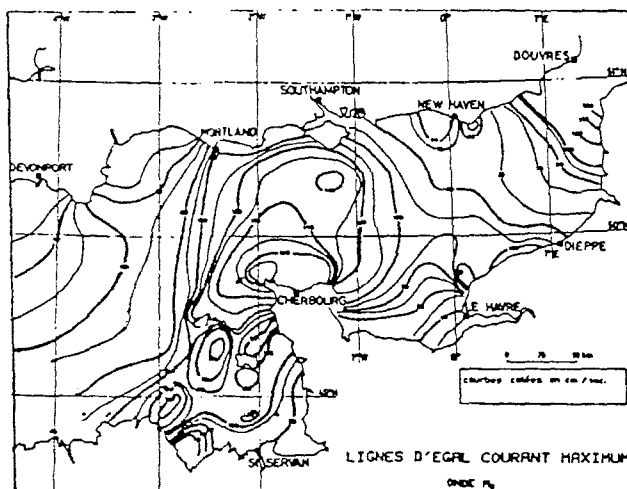


Fig. 11 : Courant M2 max (réf.(5))