MODELISATION DU TRANSPORT SOLIDE LONGITUDINAL : LES DIFFICULTES DE LA MODELISATION DU TENSEUR DE RADIATION

M. Darras, P. Sauvage, P. Pechon, K. D. Nguyen
PRINCIPIA Recherche Développement,
PRINCIPIA Recherche Développement
EDF-Laboratoire National d' Hydraulique,
Université de Lille.

ABSTRACT
Sediment transport on beaches, in the longitudinal direction, can be numerically simulated for different stages (fug. 1).

The simulation stays a developpind method and, after remembering the main stages, we will aproach the problemn linked to the swell simulation for a such model and will compare our approach with others recently published in litterature.

A - MISE EN PLACE DU PROBLEME

1- Calcul du terme moteur des courants de houle

Rappelons les équations conduisant au courant de houle, en suivant la méthode proposée par C. C. Mei (1973,1989).

On considère un écoulement qui peut être décomposé en un terme moyen dans le temps, et un terme variable, soit par exemple pour les vitesses :

$$u(x,y,z,t) = \overline{U}(x, y, z) + \tilde{u}(x, y, z, t)$$

u est à moyenne temporelle nulle, et U est le champ moyen en temps de u. Par intégration sur la verticale de l'équation de conservation de la masse, et, en moyenne sur le temps, on obtient une première équation :

$$\frac{\delta}{\delta x_i}\left[U_i (\overline{\zeta} + h)\right] = 0 \qquad (1)$$

Les équations de conservations de la quantité de mouvement permettent par ailleurs de dériver une seconde équation (vectorielle) :

$$\rho\,(\overline{\zeta}+h)\,U_i\,\frac{\delta U_j}{\delta x_i} = -\,\rho\,g\,(\overline{\zeta}+h)\,\frac{\delta\,\overline{\zeta}}{\delta\,x_j} - \frac{\delta}{\delta\,x_i}\,S_{ij} - \tau_B \qquad (2)$$

où S_{ij} est le tenseur des contraintes de radiation, avec :

$$S_{ij} = \rho\left\{\frac{g\,\overline{\zeta}^{2}}{2} + \int_{-h}^{\overline{\zeta}} dz\,\frac{\delta}{\delta x_i}\int_{z}^{\overline{\zeta}} \overline{uw}\,dz - \int_{-h}^{\overline{\zeta}} \overline{w}^{2}\,dz\right\}\rho_{ij} + \rho\int_{-h}^{\overline{\zeta}} \overline{u_i u_j}\,dz \qquad (3)$$

L'équation (2) est aux termes de dispersion près l'équation de St Venant en stationnaire. Le terme faisant apparaître le tenseur des contraintes de radiation est un terme moteur réparti sur toute la superficie du domaine.

Pour une houle de Stokes, le champ de vitesse dérive d'un potentiel qui peut s'écrire en notation complexe :

$$\phi\,(x, y, z, t) = -\,\frac{ig\,\eta\,(x, y)}{\omega}\,\frac{\mathrm{ch}k\,(z+h)}{\mathrm{ch}kh}\,e^{-i\omega t} \qquad (4.1)$$

et la surface libre est définie par :

$$\overline{\zeta}\,(x, y, t) = \eta\,(x, y)\,e^{-i\omega t} \qquad (4.2)$$

où η, est une fonction complexe. Dans ces deux formules on ne doit retenir que la partie réelle.

Ces expressions peuvent être reportées dans l'équation définissant Sij et on obtient alors (Mei, 1973) :

$$S_{ij} = \frac{\rho g}{4}\left\{\begin{array}{l} R\left(\dfrac{\delta\eta}{\delta x_i}\,\dfrac{\delta\eta^{*}}{\delta x_j}\right)\dfrac{1}{k^2}\left(1+\dfrac{2kh}{\mathrm{sh}2kh}\right) \\ +\,\delta_{ij}\left[\begin{array}{l} |\eta|^2\,\dfrac{2kh}{\mathrm{sh}\,2kh} \\ +\,\dfrac{\delta}{\delta x_i}\,R\left(\eta^{*}\,\dfrac{\delta\eta}{\delta x_i}\right)\dfrac{1}{2k^2}\,(2kh\coth 2kh - 1) \end{array}\right] \end{array}\right\} \qquad (5)$$

2) Calcul du champ de vague

Le calcul du champ de vague à partir d'une condition de houle incidente venant du large se fait à l'aide d'un modèle élément fini qui permet de résoudre l'équation de Berkhoff :

$$\frac{\delta}{\delta x_i}\left(C\,Cg \frac{\delta}{\delta x_i}\eta \right) + \omega^2 \frac{Cg}{C}\eta = 0 \tag{6}$$

Le modèle permet de prendre en compte la réflexion sur les obstacles et la diffraction autour des digues, avec un fond variable. Le domaine modélisé est rattaché au domaine du large par une condition de radiation sur un arc de cercle, le long duquel on admet que l'onde rayonnée peut être représentée par une fonction de Hankel (Lepelletier, 1980).

Les fonctions de forme sur chacun des éléments sont des fonctions linéaires pour les triangles ou bilinéaires pour les quadrangles. Ces fonctions assurent donc la continuité de la fonction seule (approximation CO)

3 - Calcul du champ de vitesse

Le calcul de champ de vitesse induit par la houle se fait à l'aide d'un code de calcul des équations de St Venant en instationnaire (Nguyen et Martin, 1988). Ce modèle est un modèle en différences finies à pas fractionnaire, à deux étapes : convection-diffusion et propagation. Le champ de contraintes de radiation est imposé dans l'étape de propagation.

Le système d'équation à résoudre s'écrit ainsi:

Conservation de la masse:

$$\frac{\delta\overline{\zeta}}{\delta t} + \frac{\delta q_x}{\delta x} + \frac{\delta q_y}{\delta y} = 0 \tag{7-1}$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\delta q_x}{\delta t} + \frac{\delta \overline{U} q_y}{\delta y} + \frac{\delta \overline{V} q_x}{\delta y} = f q_y - gH \frac{\delta\overline{\zeta}}{\delta x} + L_x \tag{7-2}$$

$$\frac{\delta q_y}{\delta t} + \frac{\delta \overline{U} q_y}{\delta x} + \frac{\delta \overline{V} q_y}{\delta y} = - f q_x - gH \frac{\delta \overline{\zeta}}{\delta y} + L_y \qquad (7\text{-}3)$$

où H : hauteur d'eau
qx, qy : débit moyen dans la direction
x et y f : paramètre de Coriolis

Les termes Lx et Ly contiennent tous les termes explicités : dispersion, frottement et donc contraintes de radiation. Ce ne sont pas les seuls termes qui génèrent la mise en mouvement de la masse d'eau, une partie étant due aux conditions aux limites.

L'étape de convection permet de résoudre une équation correspondant au membre de gauche des équations 7.2 et 7.3, avec second membre nul. Le second sous-pas permet de calculer la surface libre, par élimination des débits entre la partie résiduelle des équations 7.2, 7.3 et l'équation 7.1.

B - APPLICATION

1- Calcul pratique des termes moteurs

Les équations du calcul des termes moteurs dus à la houle présentées plus haut supposent une répartition connue de η, dont on a vu qu'elle pouvait être calculée, par exemple par un modèle de réfraction-diffraction (équation de Berkhoff). Les modèles théoriques ne prennent cependant pas en compte un phénomène fondamental pour la création des courants de houle, le déferlement. En effet, ce dernier induit des gradients importants de hauteur de houle qui conduisent à des termes moteurs important. Une difficulté essentielle est de prendre en compte le comportement des vagues entre la ligne de déferlement et la côte, dans la mesure où il ne s'agit plus d'une simple propagation, mais d'une décroissance complexe de la houle.

Dans une précédente étude, l'un des auteurs, Ph. Péchon, 1986, utilisant pour le calcul du champ un modèle de réfraction pure, par orthogonale, suivait la houle dans sa propagation après le point de déferlement, déterminé par une loi empirique sur la hauteur de vague (Battjes, 1974), en faisant décroître l'amplitude et assimilant la houle à un ressaut hydraulique suivant la méthode proposée par Stive, 1983. La variation de hauteur est alors définie par la relation :

$$\frac{d\eta}{dx} + \frac{\eta\, dH}{4\, H dx} = -A \left(\frac{H}{gT^2}\right)^{1/2} \left(\frac{\eta}{H}\right) \tag{8}$$

Le coefficient A est empirique, les tests de Stive, 1983, et Péchon, 1986, le situe à 1,3. Le modèle proposé alors par Péchon était d'utiliser la théorie cnoïdale.

Lorsqu'il s'agit d'appliquer cette approche à un champ de houle calculé par la méthode de réfraction-diffraction qui ne fait plus apparaître à proprement parler de ligne de propagation un certain nombre de difficultés apparaît. Elles nous ont conduit à éliminer dans un premier temps l'approche par la théorie cnoïdale, et à construire dans la zone de déferlement, face à la plage, des pseudolignes de propagation. Cette dernière approche est tout à fait justifiée, la plage ayant un coefficient de réflexion très faible ($\approx$0,01) ; il n'y a donc pas, dans cette zone, de réflexions complexes et la houle se propage bien directement vers la côte.

2 - Application à un cas pratique

Le cas pratique que nous avons traité consiste en une plage formant avant port d'un petit port de plaisance (figure 2). La pente des fonds est relativement forte, les passes du port étant situées approximativement par - 10 m, à 200 m - 300 m de la plage. La digue du port, protégée par une série de brises-lames, devrait créer un courant de diffraction, ce qui nous a conduit initialement à utiliser le modèle de réfraction-diffraction.

La taille des mailles de calcul, définie par la longueur d'onde d'une houle de 10 s, est approximativement de 10 m, ce qui conduit à plus de 3000 nœuds pour couvrir le port, l'avant port et une zone d'approche. Le modèle de courant, dont l'emprise est définie en figure 2, a un maillage de 6 m x 3 m dans la zone de l'avant port. Cette taille de maille très réduite est nécessitée par la taille de la zone où les gradients des termes moteurs sont très forts, c'est-à-dire pour une partie entre la ligne de déferlement et la côte ; la longueur de cette zone, qui varie pour chaque hauteur de vague traitée, est de l'ordre de 20 m à 40 m. Le modèle numérique résultant est un modèle assez important en volume. Par ailleurs, il est apparu nécessaire de définir une zone externe non négligeable afin de pouvoir simuler l'action combinée d'un courant de houle dans l'avant port et un courant littoral.

3 - Difficulté dans le calcul des termes moteurs

Le calcul direct des termes moteurs à partir de l'équation 5, s'est révélé plus difficile que prévu, la difficulté essentielle provenant de l'écart entre la grille du modèle de houle et la grille du modèle de courant. En effet, il apparaît *a priori* judicieux de projeter les données du modèle éléments finis sur la grille cartésienne structurée du modèle de courant, puis d'effectuer les calculs de termes moteurs qui seront enchainés avec le calcul des courants induits : cela offre d'une part l'avantage de la simplicité du maniement des variables et du repérage des points de maillage, et d'autre part l'intérêt de pouvoir calculer les dérivées spatiales du tenseur puis celles conduisant aux efforts dans un maillage raffiné.

Cela conduit cependant à faire apparaître dans les solutions des fluctuations parasites sur le tenseur des contraintes de radiation et donc des valeurs aberrantes de leurs dérivées qui définissent le terme moteur lui-même (figure 4). Après analyse, ces valeurs sont en fait dues à la discrétisation. En effet en examinant la figure 4 en aperçoit l'existence de cellules de petite taille ; leur grandeur est la taille des mailles du calcul initial du champ de vague. L'interpolation à l'intérieur de chaque maille conduit à des dérivées constantes par morceaux avec en certains points des valeurs aberrantes intervenant dans les dérivées secondes qui permettent de calculer la contrainte. Ceci n'apparaît plus si la taille des mailles de calcul des termes moteur est de l'ordre de grandeur de la taille des mailles de calcul du champ de houle (figure 5).

Une alternative que nous avons essayée avec succès, est de lisser la valeur de l'élévation projetée sur le maillage fin, puis de calculer les termes moteurs (figure 6). Ce lissage, correctement ajusté, permet de filtrer les fluctuations aux échelles inférieures à l'échelle du maillage de calcul initial. L'intérêt est alors de pouvoir faire le calcul des dérivées sur des points voisins à des échelles inférieures à la longueur d'onde(1). Dans le cas du calcul des termes moteurs sur le maillage de 10 m, équivalent au maillage de calcul du champ de vague, on n'a que 5 à 6 points par longueur d'onde dans certaines zones. Le

---

1 On notera qu'en fait l'échelle de fluctuations est plus souvent la demi-longueur d'onde en raison des réflexions.

calcul des dérivées premières et secondes dans ce dernier cas, n'a souvent plus qu'une signification limitée en certains points.

Examinons ce qu'il en est chez d'autres auteurs.

4 - Comparaison du modèle aux modèles d'Horikawa et de Gaillard

Horikawa, 1988, présente une synthèse des travaux japonais dans ce domaine. Le point de départ initial est cependant différent, car le modèle de houle sur lequel s'appuit ces calculs est le modèle de Tanimoto et Kobune, 1975. Ce modèle de houle linéaire, instationnaire, peut être vu comme un modèle de débit intégré sur la verticale. Le calcul se fait par différence finie, en instationnaire, sur ce débit et l'élévation de la surface libre, comme par exemple dans la résolution des équations de St Venant. La formule de calcul des termes moteurs, 5, est alors réécrite pour faire apparaître les débits correspondants à l'intégration des vitesses sur la verticale. Le tenseur de contrainte s'obtient alors directement sans nécessiter le calcul de dérivées; une dérivation spatiale est cependant nécessaire pour le calcul des contraintes elles-mêmes. Il apparaît alors, dans la présentation proposée par Horikawa, que le problème de discrétisation ne se pose plus.

La seconde approche qu'il est intéressant d'examiner est l'approche proposée par Gaillard, 1988. L'approche du calcul du champ de vague par Gaillard, est celui des distributions de singularités. Cette méthode est traditionnelle pour les calculs sur fond plat. Il propose de l'étendre à des cas à fond variable, en utilisant une méthode d'identification de singularités. Cette méthode dont la mise en œuvre pour le calcul du champ de vague doit être relativement lourde, s'avère cependant intéressante ici, car non seulement l'identification s'appuie sur la valeur des fonctions en chaque point, mais aussi sur leur gradient. Ce dernier, est donc connu en chaque point du maillage et le calcul de la formule 5, ne nécessite plus de dérivation discrétisée. Ceci lui permet de présenter des résultats de calcul de courant pour le cas d'une ouverture entre une digue perpendiculaire à la houle et une seconde digue normale à celle-ci.

C - CONCLUSIONS

La mise en oeuvre pratique du calcul de courant de houle pour des applications opérationnelles avec prise en compte de la diffraction fait apparaître des problèmes de discrétisation, dans la mesure où les termes calculés, du second ordre, font apparaitre l'élévation de la houle et son gradient.

Une première méthode pour calculer suffisamment bien le gradient consiste évidemment à multiplier le nombre de points de calcul du modèle de houle. Cependant les applications des modèles de houle en éléments finis font apparaitre leurs limites sur les calculateurs actuels (volume mémoire nécessaire) dès que le nombre de nœuds avoisine 10000, ce qui n'est pas un nombre extraordinaire si on veut respecter les contraintes liées au calcul des différents gradients.

On voit par ailleurs, par certaines approches théoriques se différenciant de la résolution des équations de réfraction-diffraction (Berkhoff), et qui permettent d'obtenir directement les gradients spatiaux des variables liées à la houle, qu'il semble possible de s'affranchir de ces limites.

Si on veut s'en tenir à la résolution de l'équation de Berkhoff, tout en voulant examiner des problèmes de second ordre, il s'agirait peut être alors de reprendre la résolution en utilisant des discrétisations qui permettent d'assurer la continuité non seulement de l'élévation, mais aussi de ses dérivées spatiales (approximation C_1) et d'utiliser au mieux les interpolateurs inhérents à ce type de modèle. Il restera cependant à poser correctement le problème des conditions aux limites pour ces dérivées.

REFERENCES

Battjes, J. A., 1974 : *Surf similarity.* Proc. I.C.C.E. Copenhague. Denmark. Juin 1974, pp 466-479.

Gaillard P. 1988 : *Numerical modelling of wave induced currents in the presence of coastal structures.* Coastal Engineering, 12 (1988) pp 63-81.

Horikawa K. 1988, editor : *Nearshore dynamics and coastal processes.* U. of Tokyo Press, 1988.

Lepelletier, 1980 : *Tsunami harbour oscillations induced by non linear transient long waves.* Ph.D. Thesis, California Institute of Technology. 1980. Rpt KH-R 41.

Mei C. C., 1973 : *A note on the averaged momentum balance in two dimensionnal water waves.* J.Marine Res. 31, 97, 1û4.

Mei C.C., 1989 : *The applied dynamics of ocean surface waves.* World scientific Publishing Co, Singapore.

Nguyen K. D., Martin J. M., 1988 : *A two dimensional depth integrated implicit model for estuaries and coastal seas using the splitting technique.* J. of est., coastal and shelf Sci.

Pechon Ph. 1986 : *Les courants de houle. 2ème partie. La modélisation numérique. Amélioration du code COUROUL.* Rapport EDF-LNH HE/42/86.12

Stive M. J. F 1983 : *Energy dissipation in wave breaking as gentle slopes.* DHL. Report. Sept. 1983

Tanimoto K., Kobune K. 1975 : *Computation of waves in a harbor basin by a numerical wave analysis method.* 22nd, Jap. Conf. Coast. Eng. pp 249-253

NOTATIONS

U : vecteur vitesse.

U_i : composante horizontale de la vitesse.

W : composante verticale de la vitesse.

ζ : élévation de la surface libre par rapport au repos.

H : profondeur d'eau au repos.

x_i : coordonnée horizontale.

ζ_B : frottement au fond.

S_{ij} : tenseur de radiation.

δ_{ij} : symbole de Kronecker.

R : partie réelle d'une fonction complexe.

η : répartition spatiale de l'élévation, fonction complexe.

- : valeur moyenne en temps.

~ : fluctuation en temps, à moyenne nulle.

Fig. 1 : organisation du calcul d'évolution littorale

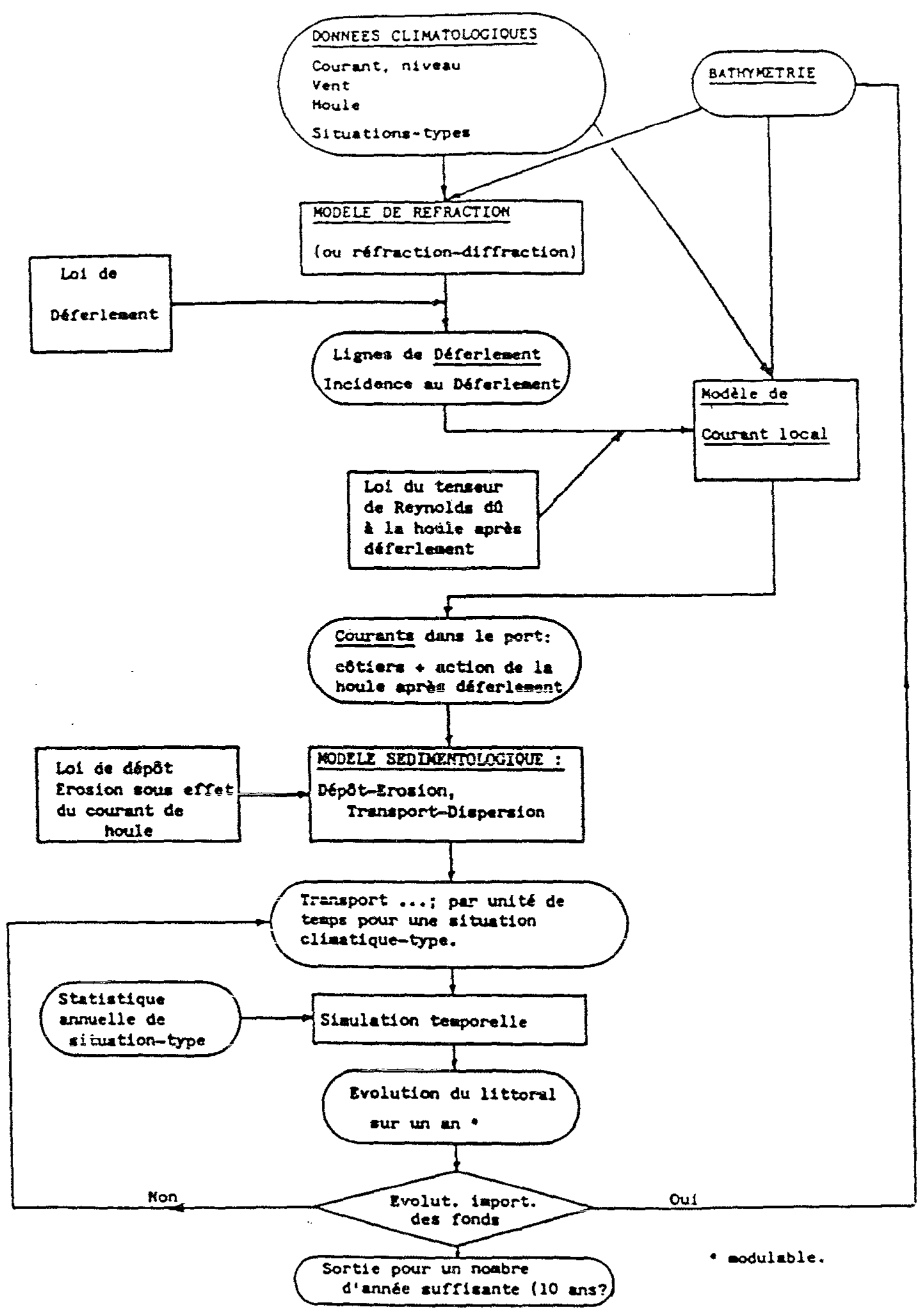

Fig. 2 : bathymétrie et topographie du site

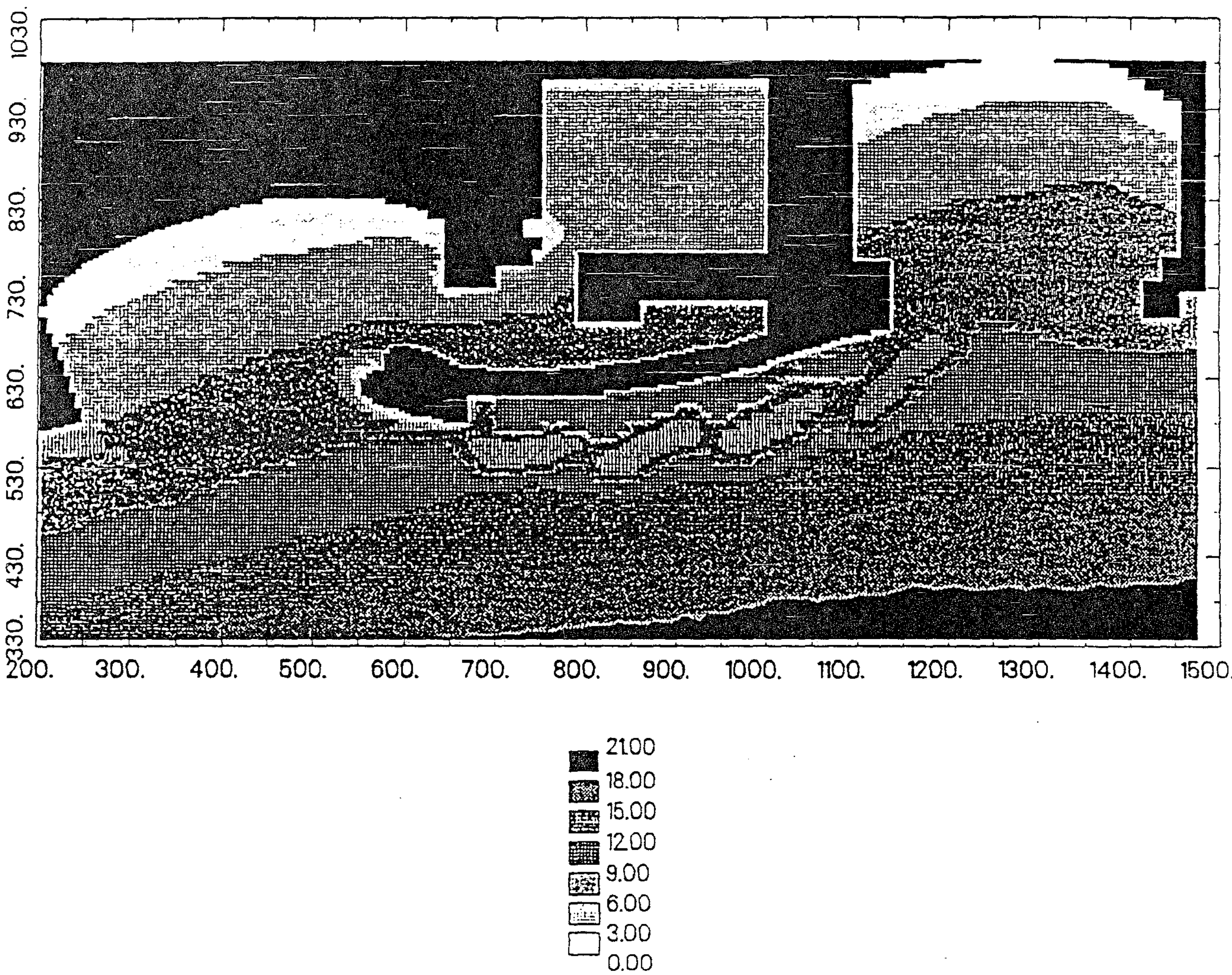

Fig. 3 a : coefficient d'amplification

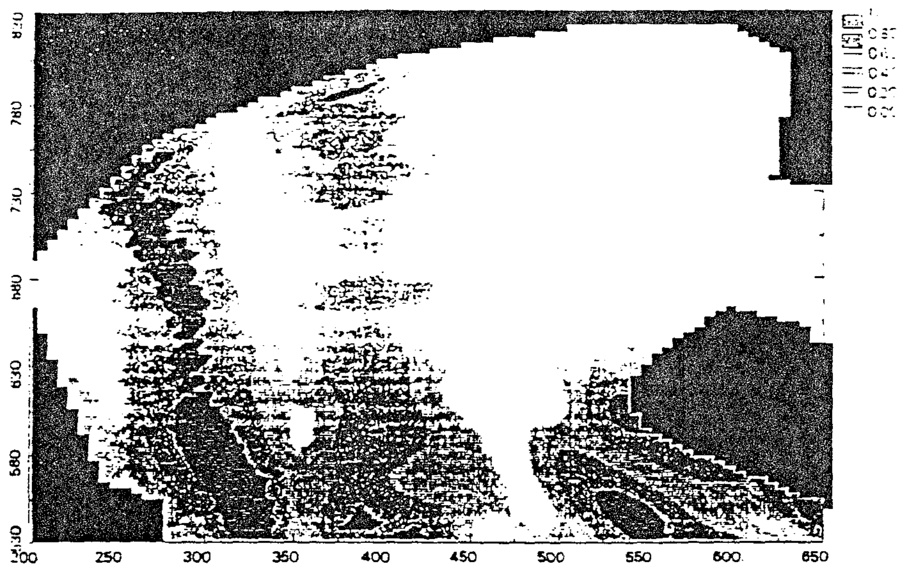

Fig. 3b : hauteur de vague avec prise en compte du défilement

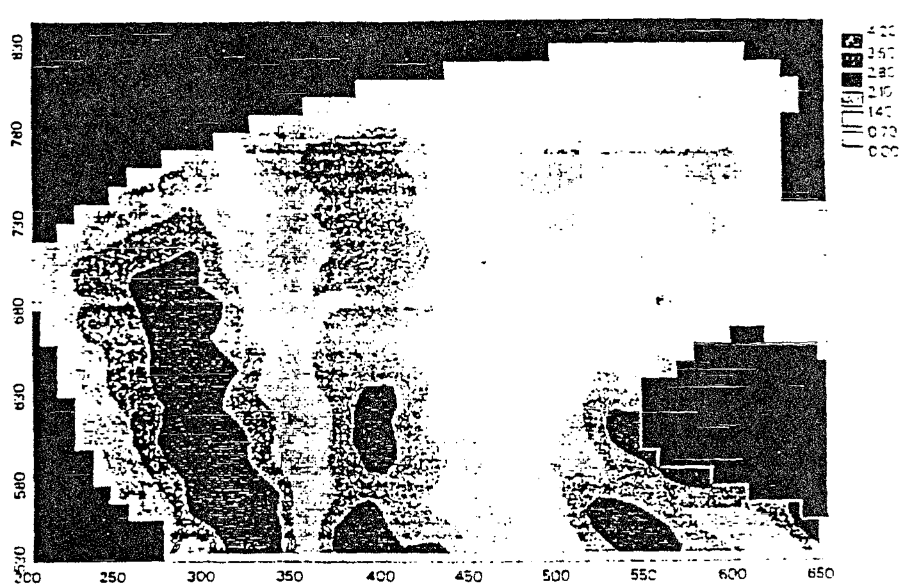

Fig. 4 : fluctuation des termes moteurs sur le maillage affiné

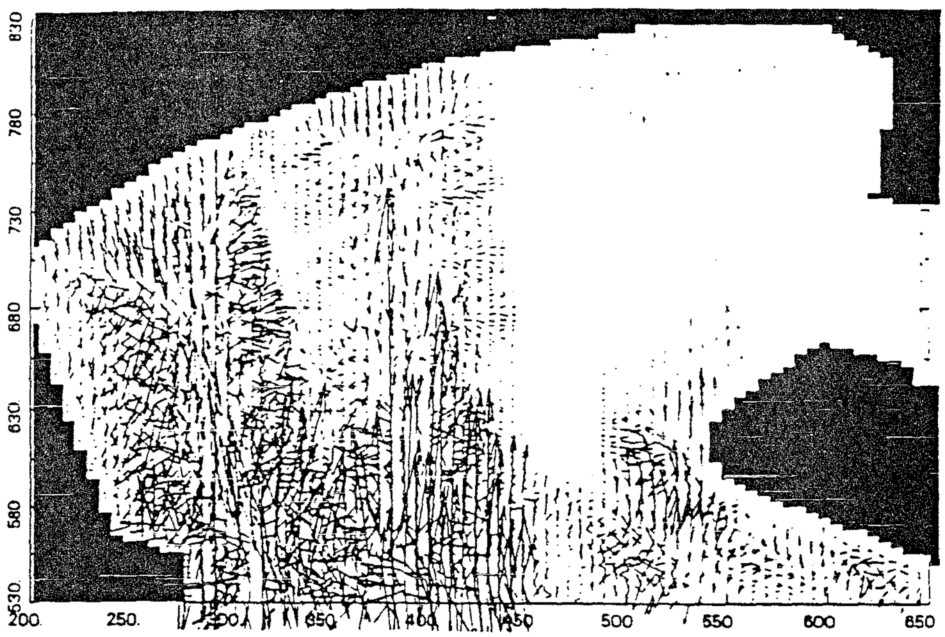

Fig. 5 : termes moteurs sur un maillage correspondant au maillage du calcul du champ de vague

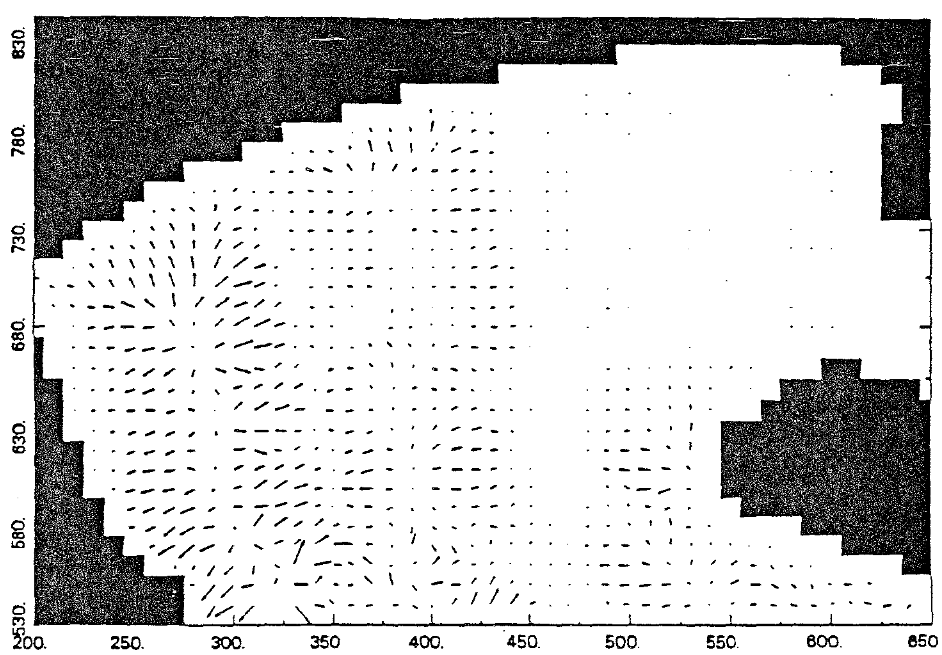

Fig. 6 : termes moteurs sur un maillage fin avec filtrage de la valeur projetée