



Apports de modèles complètement non-linéaires et dispersifs pour la simulation déterministe de la dynamique des vagues en zone côtière

Michel BENOIT^{1,2}

1. EDF R&D, Laboratoire National d'Hydraulique et Environnement (LNHE), Chatou, France.
2. Laboratoire d'Hydraulique Saint-Venant LHSV (Ecole des Ponts ParisTech, EDF R&D), Chatou, France.
michel.benoit@edf.fr

Résumé :

Un modèle mathématique reposant sur un formalisme potentiel est présenté pour simuler la propagation des vagues côtières, avec un aperçu des méthodes numériques associées. Ce modèle utilise une approximation spectrale du potentiel sur la verticale, à l'aide d'une base de polynômes de Tchebychev tronquée à un ordre N_T fixé par l'utilisateur. Cet ordre N_T contrôle la précision du modèle sur les propriétés dispersives et non-linéaires, avec une plage de valeurs recommandées de 7 à 12 pour les applications pratiques, y compris des cas de vagues irrégulières. Cette précision est en particulier vérifiée sur la relation de dispersion du modèle linéarisé, avec une erreur relative sur la célérité de phase qui ne dépasse pas 2,5 % pour des profondeurs relatives atteignant $kh = 100$ (où k est le nombre d'onde des vagues et h la profondeur d'eau). Parmi les nombreux cas de validation du modèle, deux sont présentés en détail ici, reproduisant des expériences en canal à vagues avec une barre trapézoïdale immergée. Sur le premier cas, en vagues régulières, il est vérifié que le modèle capture bien la combinaison des effets physiques de dispersion et de non-linéarité au passage de la barre, avec des transferts d'énergie vers les harmoniques supérieurs du mode fondamental. Une analyse de la vitesse horizontale sous les vagues est également menée. Ensuite, sur un cas en vagues irrégulières, on montre que le modèle reproduit très fidèlement les évolutions au passage de la barre : (i) du spectre de variance, (ii) des moments statistiques skewness et kurtosis (à la fois pour la surface libre et la vitesse horizontale 0,048 m sous le niveau moyen), et (iii) de la distribution statistique des hauteurs de vagues, y compris les vagues extrêmes, pour certaines dépassant le critère $H > 2H_s$, habituellement considéré pour identifier les vagues scélérates.

Le travail présenté dans cette communication a bénéficié de nombreuses collaborations, dont les plus significatives sont : Marissa Yates (chercheuse), Bruno Simon et Christos Papoutsellis (post-doctorants), Cécile Raoult et Jie Zhang (doctorants).

Mots-clés :

Vagues côtières, Vagues non-linéaires, Dispersion des vagues, Modèle numérique.

1. Introduction

La modélisation de la transformation déterministe (ou à phases résolues) des vagues du large vers la côte est un sujet complexe du fait des nombreux mécanismes affectant les vagues au cours de leur propagation, dont la dispersion, les non-linéarités vague-vague et vague-fond, la réfraction, le shoaling, la diffraction, la réflexion, etc. ainsi que les processus dissipatifs tels que le frottement sur le fond ou le déferlement.

De nombreux modèles mathématiques de complexité variable ont été proposés depuis une cinquantaine d'années, en introduisant notamment des hypothèses plus ou moins restrictives sur le caractère non-linéaire et dispersif des vagues. Sans prétendre ici à une revue exhaustive, on peut citer les modèles fondés sur l'équation de pente douce de BERKHOFF (1972) et ses améliorations, représentant bien la dispersion, mais limités en théorie aux vagues linéaires. Les modèles d'ondes longues de type Boussinesq et Serre-Green-Naghdi ont connu un vif succès ces trois dernières décennies, avec des niveaux croissants de représentation des effets non-linéaires et dispersifs (par exemple, NWOGU, (1993) ; MADSEN *et al.* (2006) ; CHAZEL *et al.* (2009)). Ces améliorations théoriques s'accompagnent cependant d'une complexification du jeu d'équations mathématiques avec l'ajout de termes d'ordres supérieurs, et de difficultés numériques, en particulier avec des termes faisant intervenir des dérivées partielles d'ordre 3 ou supérieurs.

Une autre approche consiste à chercher à résoudre le problème de vagues non-linéaire complet, sans hypothèse *a priori* sur l'importance de la dispersion et des non-linéarités. C'est l'orientation retenue par exemple par les modèles proposés par GRILLI *et al.* (2001), ENGSIG-KARUP *et al.* (2009), BELIBASSAKIS & ATHANASSOULIS (2011), SHAO & FALTINSEN (2014), avec des techniques numériques différentes. C'est aussi la voie que nous avons choisie pour développer un code potentiel complètement non-linéaire et dispersif, appelé whispers3D, utilisant une représentation spectrale du potentiel sur la colonne d'eau. Cette communication présente les bases du modèle (partie 2) et deux cas de validation (parties 3 et 4), parmi d'autres applications déjà réalisées.

2. Le modèle potentiel complètement non-linéaire et dispersif whispers3D

2.1. Modèle mathématique

Le modèle repose sur les hypothèses suivantes : (i) le fluide est supposé homogène, non visqueux et de masse volumique ρ constante, (ii) l'écoulement est supposé irrotationnel et s'effectue sous l'action de la gravité g , (iii) le domaine fluide reste toujours continu entre le fond marin $z = -h(\underline{x})$ et la surface libre $z = \eta(\underline{x}, t)$, i.e. les crêtes des vagues ne se retournent pas du fait du déferlement. Ici, $\underline{x} = (x, y)$ désigne les deux coordonnées d'espace horizontales, et z la coordonnée verticale ayant pour origine le niveau de l'eau au repos. Dans le cas général, le modèle peut prendre en compte une pression atmosphérique variable en espace et en temps $P_{\text{atm}}(\underline{x}, t)$, mais on se limite ici au cas d'une pression constante et homogène, prise par convention égale à 0 ($P_{\text{atm}} = 0$). De même, la cote du

fond marin peut dans le cas général varier au cours du temps, mais est ici considérée constante $z = -h(\underline{x})$. Grâce aux hypothèses (i) et (ii), une formulation potentielle est adoptée, en introduisant le potentiel des vitesses $\Phi(\underline{x}, z, t)$, tel que le champ des vitesses fluides vaut $\underline{u}(\underline{x}, z, t) = \nabla\Phi$. Du fait du caractère incompressible de l'écoulement, ce potentiel vérifie l'équation (linéaire) de Laplace dans le domaine fluide :

$$\Delta\Phi = 0 \quad (1)$$

Cette équation est complétée par deux conditions aux limites non-linéaires, respectivement cinématique et dynamique, écrites à la surface libre :

$$\partial_t\eta + \nabla_h\Phi \cdot \nabla_h\eta - \partial_z\Phi = 0 \quad \text{en } z = \eta(\underline{x}, t) \quad (2)$$

$$\partial_t\Phi + g\eta + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \frac{\sigma}{\rho}\nabla_h \cdot \left(\frac{\nabla_h\eta}{\sqrt{1 + |\nabla_h\eta|^2}} \right) = 0 \quad \text{en } z = \eta(\underline{x}, t) \quad (3)$$

et la condition d'imperméabilité au fond :

$$\nabla_h\Phi \cdot \nabla_h h + \partial_z\Phi = 0 \quad \text{en } z = -h(\underline{x}). \quad (4)$$

Dans l'équation (3), σ est le coefficient de tension de surface dans le terme modélisant les effets de capillarité pour les ondes très courtes (ce terme ne sera pas considéré dans les applications présentées ultérieurement), et la notation $\nabla_h f = (\partial_x f, \partial_y f)^T$ désigne l'opérateur gradient dans le plan horizontal.

Le système (1-4), complété par des conditions aux limites sur les frontières latérales du domaine fluide constitue le problème de vagues complètement non-linéaire. De nombreuses méthodes existent pour le résoudre numériquement (voir par exemple CLAMOND & GRUE, 2001 ; GRILLI *et al.*, 2001 ; ENGSIG-KARUP *et al.*, 2009 ; BELIBASSAKIS & ATHANASSOULIS, 2011 ; SHAO & FALTINSEN, 2014).

Du fait de l'hypothèse (iii), il est possible de définir des variables sur la surface libre, telles que le potentiel de surface libre $\psi(\underline{x}, t) = \Phi(\underline{x}, z=\eta(\underline{x}, t), t)$ ou la vitesse verticale à la surface libre $w_s(\underline{x}, t) = w(\underline{x}, z=\eta(\underline{x}, t), t) = \partial_z\Phi(\underline{x}, z=\eta(\underline{x}, t), t)$. A l'aide de ces variables, les équations (2-3) peuvent être reformulées sous la forme suivante, due à ZAKHAROV (1968) :

$$\partial_t\eta = -\nabla_h\eta \cdot \nabla_h\psi + w_s(1 + (\nabla_h\eta)^2) \quad (5)$$

$$\partial_t\psi = -g\eta - \frac{1}{2}(\nabla_h\psi)^2 + \frac{1}{2}w_s^2(1 + (\nabla_h\eta)^2) \quad (6)$$

On remarque que le système (5-6) ne fait intervenir que des variables surfaciques, ne dépendant pas de z . Cependant, pour intégrer ce système en temps, il faut déterminer $w_s(\underline{x}, t)$ à partir de $(\eta(\underline{x}, t), \psi(\underline{x}, t))$, c'est-à-dire résoudre un problème "Dirichlet-to-Neumann" (DtN) (CRAIG & SULEM, 1993). Là aussi, différentes méthodes existent pour résoudre ce problème, comme la méthode HOS (*High-Order Spectral*) (WEST *et al.*, 1987) ou des méthodes de type différences finies, telles qu'implémentées dans le code OceanWave3D (ENGSIG-KARUP *et al.*, 2009), par exemple.

Lecture spéciale

2.2. Brève description des méthodes numériques

Dans whispers3D, l'intégration en temps des équations (5-6) peut être réalisée à l'aide d'un des schémas suivants, utilisant tous un pas de temps Δt constant : (1) schéma de Runge-Kutta explicite d'ordre 3 à 3 sous-pas, (2) schéma de Runge-Kutta explicite d'ordre 4 à 4 sous-pas, (3) schéma de Gauss-Legendre Runge-Kutta implicite d'ordre 4, (4) schéma prédicteur-correcteur Adams-Bashforth-Moulton d'ordre 5.

La résolution du problème DtN s'effectue via la résolution d'un problème aux valeurs limites (BVP) portant sur le potentiel Φ , constitué de l'équation de Laplace (1), une condition de type Dirichlet $\Phi(\underline{x}, z=\eta(\underline{x}, t)) = \psi(\underline{x})$ à la surface libre, la condition d'imperméabilité au fond (4), et des conditions aux limites latérales. Pour résoudre ce BVP, suivant TIAN & SATO (2008), une approche spectrale en z est adoptée, conférant au modèle une précision d'ordre arbitrairement élevé.

Dans un premier temps, le domaine fluide est transformé en un domaine d'épaisseur constante $s \in [-1; +1]$ grâce au changement de coordonnée verticale suivant :

$$s(\underline{x}, z, t) = \frac{2z + h(\underline{x}) - \eta(\underline{x}, t)}{h(\underline{x}) + \eta(\underline{x}, t)} \quad (7)$$

La solution pour le potentiel de vitesse est alors recherchée sous la forme :

$$\Phi(\underline{x}, z, t) = \varphi(\underline{x}, s, t) \approx \sum_{n=0}^{N_T} a_n(\underline{x}, t) T_n(s) \quad (8)$$

où les termes $T_n(s)$ ($n = 0, 1, \dots, N_T$) sont les polynômes de Tchebychev de première espèce, formant une base orthogonale sur $[-1; +1]$. La précision du modèle dépend du nombre de termes $N_T + 1$ de l'approximation (8). Les différentes validations menées antérieurement ont permis de montrer que la plage de valeurs 5 à 12 pour N_T permet d'atteindre une très grande précision (BENOIT *et al.*, 2014, 2017 ; YATES & BENOIT, 2015 ; RAOULT *et al.*, 2016, 2018 ; ZHANG & BENOIT, 2021) ; voir aussi § 2.3.

Avec cette méthode, les coefficients $a_n(\underline{x}, t)$ deviennent les seules inconnues du BVP. On note que les équations de ce BVP font intervenir des dérivées spatiales (en x et y) d'ordre 1 et 2 seulement, ce qui constitue un avantage significatif par rapport aux modèles de type Boussinesq étendus, qui font intervenir des dérivées spatiales d'ordre 3, voire 5. En insérant l'approximation (8) dans les équations du BVP, puis en utilisant la méthode de Tchebychev-Tau (une variante de la méthode de Galerkin, exploitant l'orthogonalité des polynômes $T_n(s)$) pour l'équation (1) afin d'éliminer la dépendance en s , on obtient en chaque position \underline{x} un système de $N_T + 1$ équations linéaires à $N_T + 1$ inconnues pour les coefficients a_n (détails disponibles dans YATES & BENOIT (2015), RAOULT *et al.* (2016), ZHANG & BENOIT (2021)).

Ce système est résolu par la méthode itérative GMRES, utilisant un préconditionneur de type ILUT. Une fois les a_n déterminés, la solution approchée par (8) pour Φ est connue

dans tout le domaine fluide, et on peut en déduire la cinématique en n'importe quel point. En particulier, la vitesse verticale à la surface libre s'obtient par :

$$w_s(\underline{x}) = \partial_z \Phi(\underline{x}, z = \eta) = \partial_z s \partial_s \varphi(s = 1) \approx \frac{2}{h(\underline{x}) + \eta(\underline{x})} \sum_{n=1}^{N_T} a_n(\underline{x}) n^2 \quad (9)$$

et les variables surfaciques η et ψ peuvent être avancées en temps, en utilisant un des schémas d'intégration mentionnés au début de cette section.

Dans la suite, on présente des applications de la version 1DH du modèle (i.e. $\underline{x} = x$). Dans ce cas, les dérivées spatiales sont approximées par des schémas aux différences finies d'ordre arbitraire (choisi par l'utilisateur). Sauf mention contraire, des cellules centrées composées de 5 nœuds sont utilisées, donnant un ordre 4 de précision pour les dérivées spatiales premières et secondes avec un maillage de résolution Δx constant. On mentionne en complément qu'une extension du modèle aux cas 2DH (i.e. $\underline{x} = (x, y)$), utilisant la méthode des fonctions de bases radiales (RBF), a été développée et validée par RAOULT *et al.* (2018, 2019).

2.3 Etude des propriétés dispersives

Une des façons habituelles d'étudier les propriétés dispersives d'un modèle de vague consiste à déterminer sa relation dispersion pour le cas de la version linéarisée du modèle, et de considérer le cas de vagues planes progressives en profondeur d'eau h uniforme. Ce travail est présenté en détail dans BENOIT *et al.* (2017), où nous avons montré que la relation de dispersion du modèle linéarisée s'écrit, en notant $\mu = kh$:

$$\hat{\omega}_{N_T}^2 = \mu^2 \frac{1 + \sum_{p=1}^{N_T-2} \alpha_p \mu^{2p}}{1 + \sum_{p=1}^{N_T-1} \beta_p \mu^{2p}} \quad (10)$$

où $\hat{\omega}_{N_T}^2 = \omega \sqrt{h/g}$ est la pulsation adimensionnelle des vagues dans le modèle tronqué à l'ordre N_T . Les coefficients α_p et β_p apparaissant dans (10) ont été déterminés analytiquement dans BENOIT *et al.* (2017) pour N_T variant de 2 à 15 inclus. On obtient directement l'expression de la célérité de phase des vagues à l'ordre N_T :

$$\frac{C_{N_T}^2}{gh} = \frac{\hat{\omega}_{N_T}^2}{\mu^2} = \frac{1 + \sum_{p=1}^{N_T-2} \alpha_p \mu^{2p}}{1 + \sum_{p=1}^{N_T-1} \beta_p \mu^{2p}} \quad (11)$$

à comparer à la relation de dispersion exacte pour les vagues linéaires à fond plat :

$$\frac{C_{Stokes}^2}{gh} = \frac{\tanh \mu}{\mu} \quad (12)$$

La figure 1 représente l'erreur relative commise sur la célérité de phase C avec le présent modèle pour des valeurs de N_T allant de 7 à 12 incluses, sur un très large intervalle de profondeur relative (kh allant jusqu'à 100, soit plus de 30 fois la limite traditionnellement admise pour le domaine de grande profondeur d'eau $kh = \pi$). Sur cette figure, sont

Lecture spéciale

également tracées les relations de dispersion des modèles de Boussinesq d'ordres élevés de MADSEN *et al.* (2006) et CHAZEL *et al.* (2009) (non-rappelées ici, voir BENOIT *et al.* (2017)). On peut vérifier que le présent modèle avec $N_T = 7$ représente mieux les effets dispersifs que les deux modèles de Boussinesq susmentionnés pour les grandes profondeurs d'eau, dès que $kh > 30$. Plus généralement, avec une valeur de $N_T \geq 9$, l'erreur relative ne dépasse jamais 2.5 % même pour kh atteignant 100, et cette erreur est d'autant plus réduite que N_T est grand.

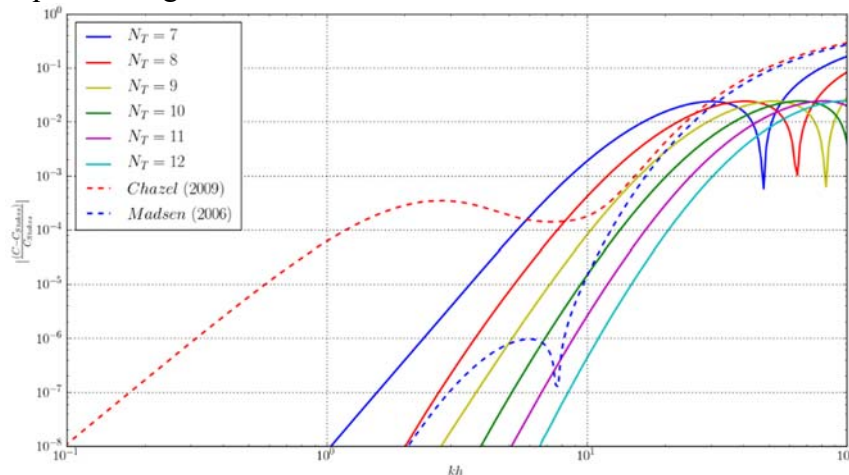


Figure 1. Erreur commise sur la célérité de phase des vagues C_{N_T} pour le modèle linéarisé en profondeur d'eau uniforme pour des valeurs de N_T allant de 7 à 12.

D'autres aspects de la version linéarisée du modèle (profils verticaux de vitesses orbitales horizontale et verticale sur fond plat pour différents kh , coefficient de shoaling en fond variable, réflexion sur une marche immergée) sont étudiés dans BENOIT *et al.* (2017), et ont conduit à recommander une plage de valeurs de 7 à 12 pour l'ordre N_T , en fonction de l'intervalle de kh de l'application visée.

3. Validation en vagues régulières non-déferlantes sur une barre immergée

3.1 Description des expériences en canal à vagues

Le modèle est ici appliqué à des expériences réalisées au laboratoire d'hydrodynamique du Département de Mathématiques de l'Université d'Oslo (Norvège), décrites par LAWRENCE *et al.* (2021). Le canal à vagues mesure 24,6 m de long et 0,5 m de large. Une barre de forme trapézoïdale est installée sur le fond du canal, constituée de pentes planes ascendantes et descendantes à 1/3,81 de 1,6 m de long chacune séparées par une région plate de 1,6 m de long, culminant à 0,42 m au-dessus du fond du canal. La hauteur d'eau au repos de part et d'autre de la barre est $h_1 = 0,53$ m, ce qui correspond à une hauteur d'eau de $h_2 = 0,11$ m sur la barre. À une extrémité du canal se trouve un générateur de vagues, et à l'autre extrémité un absorbeur de vagues. La distance entre le batteur à vagues et le centre de la barre est de 12,4 m.

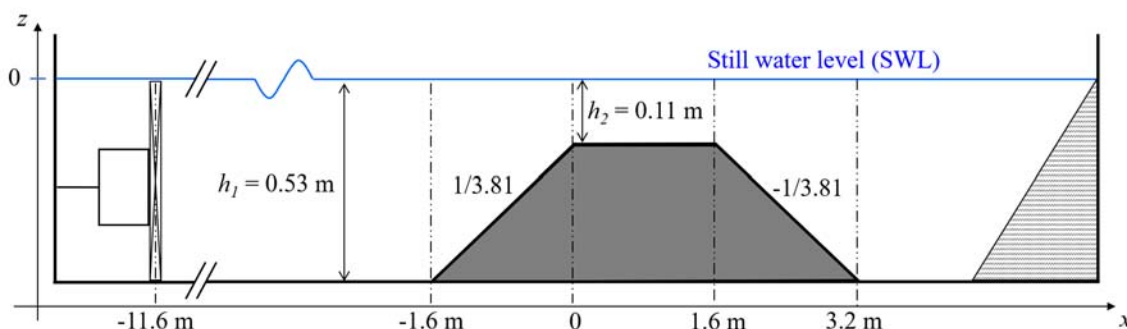


Figure 2. Vue schématique (plan pas à l'échelle) du dispositif expérimental en canal à vagues de LAWRENCE *et al.* (2021) et TRULSEN *et al.* (2020).

Un dispositif de mesure mobile comporte quatre sondes à vagues à ultrasons et un vélocimètre acoustique Doppler (ADV) "Vectrino" de Nortek, mesurant la vitesse à une cote $z_0 = -0,05$ m sous le niveau de l'eau au repos. Une vue d'ensemble du montage expérimental est donnée sur la figure 2. Les expériences ont été répétées 31 fois, en plaçant le dispositif de mesure à différentes positions dans le canal, ce qui fournit au total des mesures de surface libre en 124 positions et de vitesse en 31 positions. Les mesures sont réalisées sur une durée suffisamment courte pour éviter les effets de réflexions en bout de canal. On considère ici l'essai en vagues régulières présenté dans la section 3.4 de LAWRENCE *et al.* (2021) avec une fréquence de vagues de 0,7 Hz ($T \approx 1,43$ s) et une hauteur de vague d'environ $H = 0,03$ m permettant d'obtenir des vagues fortement non-linéaires sur la barre, mais sans déferlement visible.

3.2 Résultats sur la surface libre

La figure 3 présente des comparaisons du profil temporel de surface libre en 6 sondes. Pour la simulation numérique, les paramètres utilisés sont $N_T = 7$, $\Delta t = 0,02$ s $\approx T/71$, et $\Delta x = 0,04$ m $\approx L/67$ où $L \approx 2,69$ m est la longueur d'onde des vagues incidentes pour la profondeur d'eau $h_1 = 0,53$ m, donnée par la relation de dispersion des vagues linéaires. Avant la barre (sondes n° 1 et 25), les vagues sont relativement symétriques par rapport au plan vertical, mais montrent une asymétrie par rapport au plan horizontal du fait de la non-linéarité. Sur la barre (sondes n° 70 et 106) les profils deviennent asymétriques du fait des non-linéarités. Après la barre (sondes n° 115 et 124), du fait de la libération des harmoniques d'ordres supérieurs, le profil temporel est très variable d'une position à l'autre. Ces évolutions sont très bien restituées par le modèle numérique.

Lecture spéciale

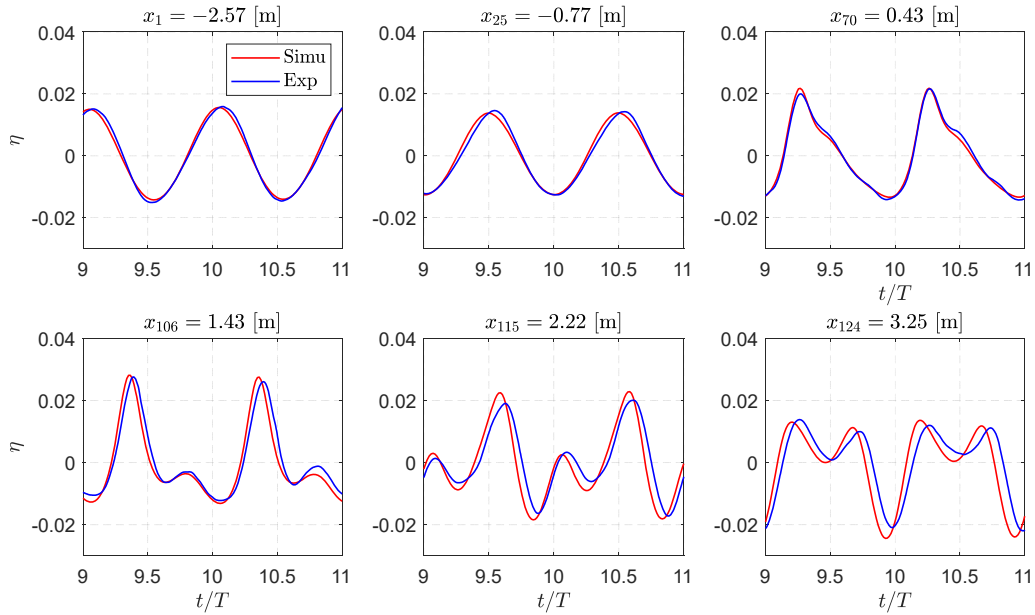


Figure 3. Comparaison des profils de surface libre mesurés et simulés pour l'expérience en vagues régulières présentée dans LAWRENCE *et al.* (2021).

3.3 Résultats sur la vitesse horizontale à $z_0 = -0.05$ m

La figure 4 présente des comparaisons du profil temporel de $u(z_0)$ en 6 positions le long du profil bathymétrique. Dans le code, les vitesses fluides sont obtenues en tout point du fluide à partir de l'expression du potentiel (8) :

$$u = \partial_x \varphi + \partial_s \varphi \partial_x s = \sum_{n=0}^{N_T} \partial_x a_n T_n + \frac{(1-s) \partial_x h - (1+s) \partial_x \eta}{h + \eta} \sum_{n=1}^{N_T} a_n T_{n,s} \quad (13)$$

$$w = \partial_s \varphi \partial_z s = \frac{2}{h + \eta} \sum_{n=1}^{N_T} a_n T_{n,s} \quad (14)$$

avec la notation : $T_{n,s} = dT_n/ds$. On peut vérifier que les amplitudes et formes de variations de la vitesse horizontale sont reproduites par le modèle avec une grande précision, quelle que soit l'abscisse x . A contrario, LAWRENCE *et al.* (2021) indiquent qu'ils ont dû utiliser deux modèles différents sur ce cas, un pour prédire le champ de surface libre (de type HOS) et un autre pour calculer les vitesses dans le fluide (de type Boussinesq).

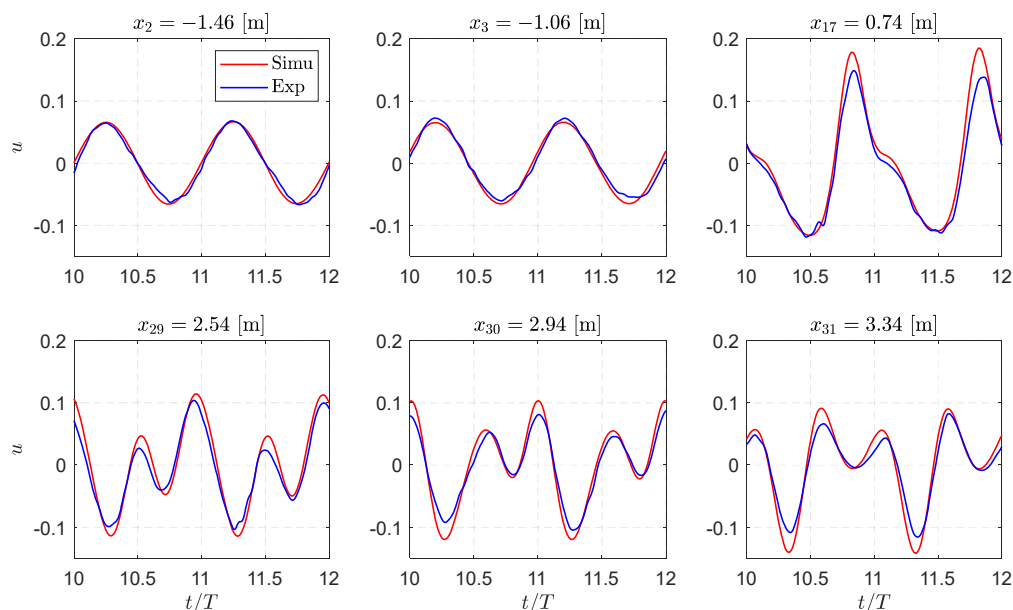


Figure 4. Comparaison des profils de vitesse $u(z_0)$ en $z_0 = -0,05$ m mesurés et simulés pour l'expérience en vagues régulières présentée dans LAWRENCE *et al.* (2021).

4. Application à l'étude de la statistique des vagues extrêmes en zone côtière

4.1 Description des expériences en canal à vagues

Le modèle a fait l'objet d'une validation poussée par comparaison à des expériences menées par TRULSEN *et al.* (2020) dans le même canal à vagues de l'Université d'Oslo que celui de la partie précédente, mais en considérant cette fois-ci des vagues irrégulières (essai n°3 de la campagne expérimentale). Les résultats sont présentés et discutés en détail dans ZHANG & BENOIT (2021).

La bathymétrie de la barre immergée est identique à celle de la figure 2, et la hauteur d'eau au repos loin de la barre vaut à nouveau $h_1 = 0,53$ m. Les mesures d'élévation de surface libre sont réalisées en 91 positions le long du canal et les mesures de vitesse en 37 positions à une cote $z_0 = -0,048$ m sous le niveau au repos de l'eau. Les conditions de vagues incidentes de l'essai 3 sont définies par un spectre de type JONSWAP avec un facteur de pic $\gamma = 3,3$, une période de pic $T_p = 1,1$ s, et une hauteur significative incidente $H_{m0} = 0,025$ m. Les paramètres non-dimensionnels caractérisant ce cas (profondeur relative $\mu = k_p h$, cambrure $\varepsilon = k_p a_c$, et nombre d'Ursell $Ur = \varepsilon/\mu^3$, où k_p désigne le nombre d'onde correspondant à la période de pic et $a_c = \sqrt{2m_0} = H_{m0}/\sqrt{8}$ est l'amplitude caractéristique des vagues), avant et sur la barre, sont donnés dans le tableau 1.

Les mesures ont été réalisées sur une longue durée, de 90 min, ce qui représente environ 4900 vagues à la période de pic, avec une fréquence d'acquisition $f_s = 125$ Hz. TRULSEN *et al.* (2020) indiquent qu'aucun déferlement n'est observé durant tout l'essai.

Lecture spéciale

Tableau 1. Paramètres adimensionnels de l'essai 3 de TRULSEN et al. (2020).

	$\mu = k_p h$	$\varepsilon = k_p a_c$	$Ur = \varepsilon/\mu^3$
Avant la barre $h_1 = 0,53$ m	1,85	0,031	0,0049
Sur le sommet de la barre $h_2 = 0,11$ m	0,64	0,052	0,1918

4.2 Comparaison des spectres mesurés et simulés

La simulation numérique whispers3D est effectuée avec $N_T = 7$, $Dt = 0,01$ s = $T_p/110$, et $Dx = 0,01$ m $\approx L_p/180$. Les vagues incidentes sont générées dans le modèle à partir de la série temporelle de surface libre mesurée à la première sonde expérimentale, en utilisant une théorie linéaire. La figure 5 montre la comparaison de l'évolution du spectre de variance (fréquence de vague suivant l'axe vertical, normalisée par la fréquence de pic des vagues incidentes) le long du profil bathymétrique (coordonnée x suivant l'axe horizontal). On note en premier lieu une excellente correspondance entre les deux spectres sur tout l'intervalle de fréquences $[0 ; 3f_p]$. Les deux spectres montrent clairement l'augmentation d'énergie du pic harmonique à $2f_p$ dans la gamme de fréquences $[1,5f_p ; 2,5f_p]$ dans la zone de faible profondeur d'eau sur le sommet de la barre. Le niveau d'énergie du pic principal à f_p est progressivement atténué le long du canal dans le spectre mesuré, alors que ce niveau est plus constant dans le spectre simulé. Il s'agit d'un effet de dissipation par frottement sur le fond et les parois du canal, non pris en compte dans la simulation actuelle.

On note aussi une amplification de l'énergie dans l'intervalle de basses fréquences (BF) $[0 ; 0,5f_p]$ au passage de la barre, du fait des interactions non-linéaires vague-fond. La signature de ces ondes BF est un peu différente entre les mesures et la simulation, mais qualitativement comparable. Au global, cette comparaison (complétée par d'autres analyses présentées dans ZHANG & BENOIT (2021) et fondées sur une confrontation détaillée des spectres et des bi-spectres en plusieurs sondes) démontre la capacité du modèle à représenter les effets dispersifs et non-linéaires sur une gamme très étendue de fréquences.

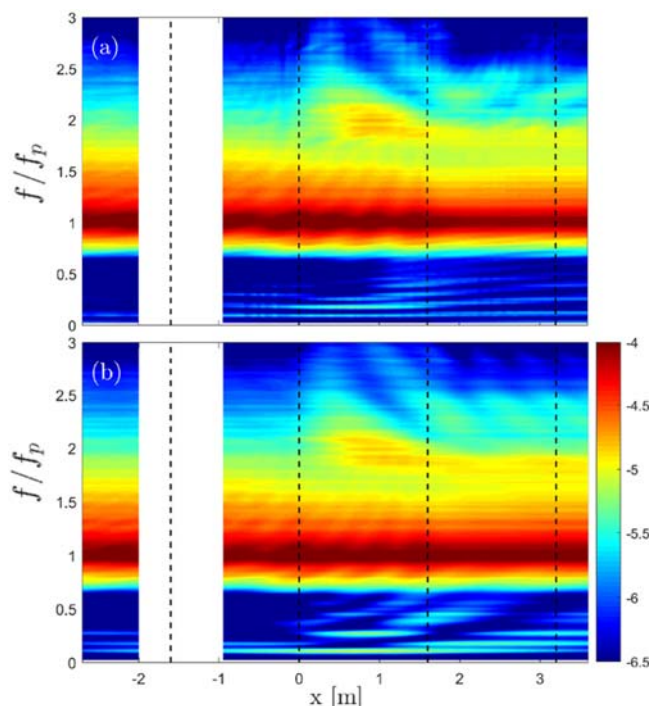


Figure 5. Comparaison de l'évolution spatiale des spectres de variance de surface libre (a) mesurés et (b) simulés pour l'essai 3 de TRULSEN et al. (2020). Les traits pointillés noirs représentent l'emprise de la barre submergée.

4.3 Comparaison des paramètres non-linéaires de l'état de mer

Les moments statistiques d'ordre 3 (skewness : $\lambda_3 = \langle (f(t) - \langle f(t) \rangle)^3 \rangle / \sigma^3$, où $\sigma^2 = \langle (f(t) - \langle f(t) \rangle)^2 \rangle$ et $\langle \rangle$ désigne l'opérateur de moyenne, ici temporelle) et d'ordre 4 (kurtosis : $\lambda_4 = \langle (f(t) - \langle f(t) \rangle)^4 \rangle / \sigma^4$) permettent de quantifier le caractère non-linéaire des signaux. Plus précisément, λ_3 renseigne sur le degré d'asymétrie du signal par rapport à la valeur moyenne ($\lambda_3 = 0$ pour un état de mer Gaussien), et λ_4 donne une indication sur la forme de la queue de la distribution des valeurs extrêmes ($\lambda_4 = 3$ pour un état de mer Gaussien). La figure 6 présente les évolutions spatiales de ces deux paramètres, calculés pour l'élévation de surface libre η d'une part (courbes noires) et pour la vitesse horizontale $u(z_0)$ d'autre part (courbes rouges).

Les évolutions des skewness $\lambda_3(\eta)$ et $\lambda_3(u(z_0))$ sont assez similaires sur le domaine (figure 6.a). Leurs valeurs maximales et minimales sont atteintes à peu près aux mêmes positions, peu après le début et la fin de la crête de la barre (maximum à $x \approx 0,6$ m, et minimum à $x \approx 2,3$ m). $\lambda_3(\eta) > 0$ traduit des vagues avec des crêtes plus hautes et des creux plus plats, et vice versa pour des valeurs négatives. Le profil des vagues est presque symétrique avant la barre et devient asymétrique sur la barre ($\lambda_3(\eta) \approx 0,75$ au maximum). Ensuite, dans la zone de pente descendante, $\lambda_3(\eta)$ change de signe à deux reprises. L'évolution spatiale de $\lambda_3(u(z_0))$ est globalement similaire. La figure 6.b montre que les valeurs de $\lambda_4(\eta)$ dans l'expérience et la simulation sont légèrement supérieures à 3 avant la barre. Ensuite, elles augmentent rapidement vers la fin de la pente ascendante, pour atteindre

Lecture spéciale

leur maximum sur la crête de la barre, à peu près à la même position que pour $\lambda_3(\eta)$. Ensuite, $\lambda_4(\eta)$ diminue de façon plus progressive, et revient finalement à 3 vers la fin de la pente descendante. Les variations de $\lambda_4(\eta)$ sont bien capturées par le modèle numérique, bien que la valeur maximale soit un peu sous-estimée ($\lambda_4(\eta) \approx 4$ dans les simulations pour 4,2 dans les mesures). Comme observé par TRUSLEN *et al.* (2020), $\lambda_4(u(z_0))$ présente un comportement différent, sans amplification notable sur la pente ascendante, ni sur la crête de la barre ; elle atteint son maximum après une courte distance sur la pente descendante. Ce comportement de $\lambda_4(u(z_0))$ est bien simulé, y compris sa valeur maximale.

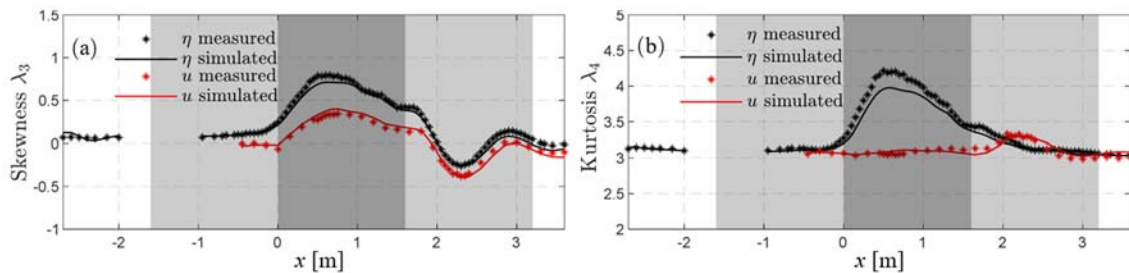


Figure 6. Comparaison de l'évolution spatiale des paramètres de (a) skewness et (b) kurtosis pour l'élévation de surface libre et la vitesse $u(z_0)$ à $z_0 = -0,048$ m pour l'essai 3 de TRUSLEN *et al.* (2020).

4.4 Comparaison des distributions de hauteurs de vagues

Finalement, on présente sur la figure 7 une comparaison des distributions statistiques des hauteurs de vagues H (crêtes-à-creux) obtenues à partir des mesures et des simulations en utilisant la même méthode de *zero-crossing* pour séparer les vagues. Quatre sondes sont sélectionnées, la première n°9 située avant la barre ($x = -0,8$ m), les deux suivantes n°35 et 39 sur le sommet de la barre ($x = 0,6$ et $0,8$ m) et la dernière n°87 après la barre ($x = 3,2$ m). Sur ces graphes, la zone située à droite du trait en pointillés noirs correspond aux hauteurs de vagues telles que $H > 8\sqrt{m_0} = 2H_{m0}$, soit le critère habituellement utilisé pour identifier une vague scélérate. Ces distributions sont également comparées à la distribution de référence de BOCCOTTI (2000), généralisant la distribution de Rayleigh. On peut vérifier que la distribution de H suit à peu près le modèle de Boccotti avant la barre (sonde n°9) et également après la barre (sonde n°87). Par contre, sur la barre (sondes n° 35 et 39), les distributions mesurées et simulées s'écartent significativement de la distribution de Boccotti, avec une augmentation considérable de la probabilité d'occurrence des valeurs extrêmes. Cette augmentation est due aux effets non-linéaires qui accompagnent l'adaptation de l'état de mer incident (en quasi-équilibre dans la profondeur d'eau h_1) vers un nouvel état d'équilibre pour la profondeur d'eau réduite $h_2 < h_1$. C'est dans cette zone, où l'état de mer se trouve hors-équilibre, que les vagues extrêmes sont plus fréquentes. On peut observer que la probabilité de rencontrer une vague de hauteur $H > 2H_s$ (donc pouvant être qualifiée de scélérate) sur le sommet de la barra devient relativement élevée (environ 0,1 %), à comparer à une probabilité de

dépassement de l'ordre de 0,01 % dans la distribution de BOCCOTTI (2000). Le modèle numérique reproduit de façon assez remarquable cette distribution statistique, aux différentes positions, y compris les valeurs extrêmes et donc rares.

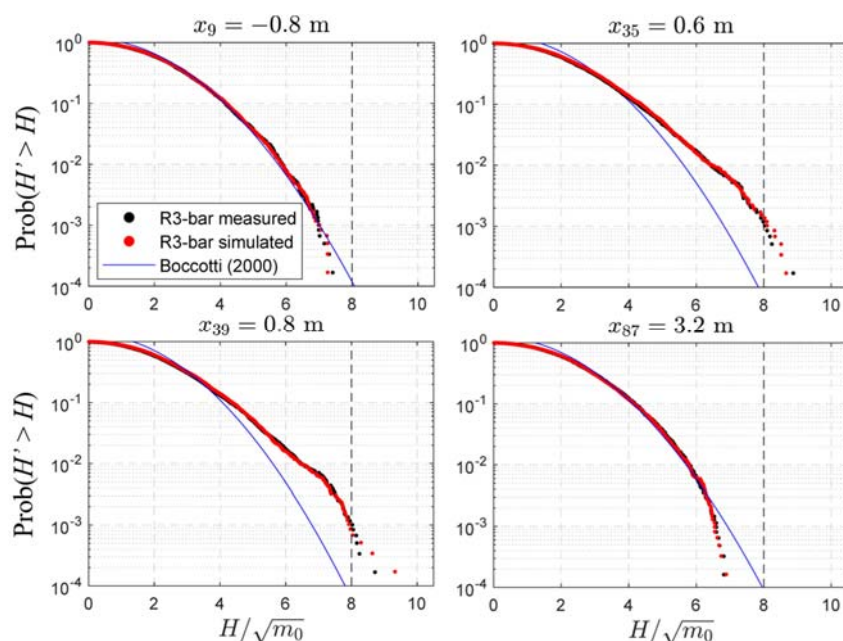


Figure 7. Comparaison des distributions statistiques de hauteurs de vagues (probabilité de dépassement) déduites des mesures (en noir) et de la simulation numérique (en rouge) en quatre positions le long du canal pour l'essai 3 de TRULSEN *et al.* (2020).

5. Conclusions

Les deux applications présentées ici, ainsi que de nombreux tests réalisés par YATES & BENOIT (2015), RAOULT *et al.* (2016), BENOIT *et al.* (2017), ZHANG *et al.* (2019), ZHANG & BENOIT (2021), démontrent les performances du modèle whispers3D, sur des cas à fond variable, en vagues régulières ou irrégulières. En augmentant l'ordre N_T d'approximation du potentiel, on peut contrôler la précision du modèle sur les aspects dispersifs et non-linéaires. La plage de valeurs recommandées pour N_T est de 7 à 12, mais les deux cas traités ici ont utilisé $N_T = 7$, valeur suffisante après une étude de convergence. Cette précision a été vérifiée sur la relation de dispersion du modèle linéarisé, avec une erreur relative sur la célérité de phase inférieure à 2,5 % pour kh allant jusqu'à 100.

Sur le premier cas présenté, en vagues régulières, le modèle capture bien la combinaison des effets physiques de dispersion et de non-linéarité au passage d'une barre submergée, avec des transferts d'énergie vers les harmoniques supérieurs du mode fondamental. La capacité du modèle à prédire les vitesses sous les vagues a également été vérifiée. Sur le second cas, en vagues irrégulières, le modèle reproduit très fidèlement les évolutions au passage de la barre : (i) du spectre de variance, y compris les transferts vers les hautes et les basses fréquences, (ii) des moments statistiques skewness et kurtosis (à la fois pour la

surface libre et la vitesse horizontale), et (iii) de la distribution statistique des hauteurs de vagues, y compris les vagues extrêmes, pour certaines dépassant le critère $H > 2H_s$, habituellement considéré pour identifier les vagues scélérates. Récemment, le code a été enrichi de modèles permettant de représenter le déferlement avec plusieurs critères de déferlement et modèles de dissipation, implémentés et validés pour des vagues régulières ou irrégulières (PAPOUTSELLIS *et al.* 2019 ; SIMON *et al.*, 2019).

6. Références

BELIBASSAKIS K.A., ATHANASSOULIS G.A. (2011) *A coupled-mode system with application to nonlinear water waves propagating in finite water depth and in variable bathymetry regions*. Coastal Engineering, Vol. 58, pp 337–350.

<https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2010.11.007>

BENOIT M., RAOULT C., YATES M.L. (2014) *Fully nonlinear and dispersive modelling of surf zone waves: non-breaking tests*. Coastal Engineering Proceedings, Vol. 1(34), waves.15, 15-20 July 2014, Seoul (Korea). <https://doi.org/10.9753/icce.v34.waves.15>

BENOIT M., RAOULT C., YATES M.L. (2017) *Analysis of the linear version of a highly dispersive potential water wave model using a spectral approach in the vertical*. Wave Motion, Vol. 74, pp 159–181. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2017.07.002>

BERKHOFF J.C.W. (1972) *Computation of combined refraction-diffraction*. Coastal Engineering Proceedings, Vol. 1(13), 23. <https://doi.org/10.9753/icce.v13.23>

BOCCOTTI P. (2000) *Wave Mechanics for Ocean Engineering*. Elsevier Science.

CHAZEL F., BENOIT M., ERN A., PIPERNO S. (2009) *A double-layer Boussinesq-type model for highly nonlinear and dispersive waves*. Proceedings of the Royal Society A, Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol. 465, pp 2319–2346.

<https://doi.org/10.1098/rspa.2008.0508>

CLAMOND D., GRUE J. (2001) *A fast method for fully nonlinear water-wave computations*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 447, pp 337–355.

<https://doi.org/10.1017/S0022112001006000>

CRAIG W., SULEM C. (1993) *Numerical simulation of gravity waves*. Journal of Computational Physics, Vol. 108, pp 73–83. <https://doi.org/10.1006/jcph.1993.1164>

ENGSIG-KARUP A.P., BINGHAM H.B., LINDBERG O. (2009) *An efficient flexible-order model for 3D nonlinear water waves*. Journal of Computational Physics, Vol. 228 pp 2100–2118. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.11.028>

GRILLI S.T., GUYENNE P., DIAS F. (2001) *A fully nonlinear model for three-dimensional overturning waves over arbitrary bottom*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 35, pp 829–867. [https://doi.org/10.1002/1097-0363\(20010415\)35:7<829::AID-FLD115>3.0.CO;2-2](https://doi.org/10.1002/1097-0363(20010415)35:7<829::AID-FLD115>3.0.CO;2-2)

LAWRENCE C., GRAMSTAD O., TRULSEN K. (2021) *Variational Boussinesq model for kinematics calculation of surface gravity waves over bathymetry*. Wave Motion, Vol. 100, 102665. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2020.102665>

- MADSEN P.A., FUHRMAN D., WANG B. (2006) *A Boussinesq-type method for fully nonlinear waves interacting with a rapidly varying bathymetry*. Coastal Engineering, Vol. 53, pp 487–504. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2005.11.002>
- NWOGU O. (1993) *An alternative form of the Boussinesq equations for nearshore wave propagation*. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, Vol. 119, pp 618–638. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-950X\(1993\)119:6\(618\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-950X(1993)119:6(618))
- PAPOUTSELLIS C., YATES M.L., SIMON B., BENOIT M. (2019) *Modeling of depth-induced wave breaking in a fully nonlinear free-surface potential flow model*. Coastal Engineering, Vol. 154, 103579. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2019.103579>
- RAOULT C., BENOIT M., YATES M.L. (2016) *Validation of a fully nonlinear and dispersive wave model with laboratory non-breaking experiments*. Coastal Engineering, Vol. 114, pp 194–207. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2016.04.003>
- RAOULT C., BENOIT M., YATES M.L. (2018) *Développement d'un modèle numérique non-linéaire et dispersif pour la propagation des vagues en zone côtière*. Revue Paralia, Vol. 11, 1.1–1.14. <http://doi.org/10.5150/revue-paralia.2018.n01>
- RAOULT C., BENOIT M., YATES M.L. (2019) *Development and validation of a 3D RBF-spectral model for coastal wave simulation*. Journal of Computational Physics, Vol. 378, pp 278–302. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.11.002>
- SHAO Y-L., FALTINSEN O.M. (2014) *A harmonic polynomial cell (HPC) method for 3D Laplace equation with application in marine hydrodynamics*. Journal of Computational Physics, Vol. 274, pp 312–332. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.06.021>
- SIMON B., PAPOUTSELLIS C.E., BENOIT M., YATES M.L. (2019) *Comparing methods of modeling depth-induced breaking of irregular waves with a fully nonlinear potential flow approach*. Journal of Ocean Engineering and Marine Energy, Vol. 5, pp 365–383. <https://doi.org/10.1007/s40722-019-00154-7>
- TIAN Y., SATO S. (2008) *A numerical model on the interaction between nearshore nonlinear waves and strong currents*. Coastal Engineering Journal, Vol. 50(4), pp 369–395. <https://doi.org/10.1142/S0578563408001879>
- TRULSEN K., RAUSTØL A., JORDE S., RYE L.B. (2020) *Extreme wave statistics of long-crested irregular waves over a shoal*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 882, R2. <https://doi.org/10.1017/jfm.2019.861>
- WEST B.J., BRUECKNER K.A., JANDA R.S., MILDER M., MILTON R.L. (1987) *A new numerical method for surface hydrodynamics*. Journal of Geophysical Research, Oceans, Vol. 92(C11), pp 11803–11824. <https://doi.org/10.1029/JC092iC11p11803>
- YATES M.L., BENOIT M. (2015) *Accuracy and efficiency of two numerical methods of solving the potential flow problem for highly nonlinear and dispersive water waves*. International Journal for Numerical Methods in Fluids. Vol. 77(10), pp 616–640. <https://doi.org/10.1002/flid.3992>

Lecture spéciale

ZAKHAROV V.E. (1968) *Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, Vol. 9(2), pp 190–194. <https://doi.org/10.1007/BF00913182>

ZHANG J., BENOIT M., KIMMOUN O., CHABCHOUB A., HSU H.-C. (2019) *Statistics of extreme waves in coastal waters: Large scale experiments and advanced numerical simulations*. Fluids, Vol. 4(2), 99. <https://doi.org/10.3390/fluids4020099>

ZHANG J., BENOIT M. (2021) *Wave-bottom interaction and extreme wave statistics due to shoaling and de-shoaling of irregular long-crested wave trains over steep seabed changes*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 912, A28. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1125>